

## Sommes doubles

**Exercice 1** Calculer les sommes doubles:

$$1. \sum_{1 \leq i, j \leq n} i j$$

$$3. \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a^{i+j}, a \in \mathbb{R}.$$

$$4. \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (i + j)^2.$$

$$6. \sum_{1 \leq i, j \leq n} i 2^j$$

$$2. \sum_{1 \leq i, j \leq n} \ln(i^j)$$

$$5. \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$$

$$7. \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} e^{i+j}$$

**Exercice 2** Calculer les sommes doubles suivantes:

$$1. \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j|$$

$$2. \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j).$$

**Exercice 3** Soit  $n \geq 1$ . On note  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  et  $u_n = \sum_{k=1}^n H_k$ . Montrer que, pour tout  $n \geq 1$  :  $u_n = (n + 1) H_n - n$

**Exercice 4** Soit  $n \geq 1$ .

$$1. \text{ En remarquant que } k = \sum_{j=1}^k 1, \text{ montrer que : } \sum_{k=1}^n k 2^k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k 2^k.$$

$$2. \text{ Calculer alors la somme : } \sum_{k=1}^n k 2^k$$