Sommes doubles

Exercice 1 Calculer les sommes doubles:

1. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i\,j$
2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \ln(i^j)$
3. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a^{i+j}$, $a\in\mathbb{R}$.
4. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)^2$.
5. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$

Exercice 2 Calculer les sommes doubles suivantes:

1. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$
2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$.

Exercice 3 Calculer les sommes doubles suivantes:

1. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}\binom{n}{j}$.
2. $\displaystyle\sum_{0\leqslant j\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k}\binom{k}{j} a^j b^{k-j}$.

Exercice 4 Soit $n\geqslant 1$. On note $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k$. Montrer que, pour tout $n\geqslant 1$: $u_n=(n+1)\,H_n-n$

Exercice 5 Soit $n\geqslant 1$.

1. En remarquant que $k=\displaystyle\sum_{j=1}^{k} 1$, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,2^k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k$.
2. Calculer alors la somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,2^k$