Sommes doubles

Exercice 1 Calculer les sommes doubles:

1. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i\,j$
2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \ln(i^j)$
3. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a^{i+j}$, $a\in\mathbb{R}$.
4. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)^2$.
5. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$
6. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i\,2^j$
7. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} e^{i+j}$

Exercice 2 Calculer les sommes doubles suivantes:

1. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$
2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$.

Exercice 3 Soient $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Montrer que pour tout entier n naturel non nul,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i\,a_j$$

Exercice 4 Soit $n\geqslant 1$. On note $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k$. Montrer que, pour tout $n\geqslant 1$: $u_n=(n+1)\,H_n-n$

Exercice 5 Soit $n\geqslant 1$.

1. En remarquant que $k=\displaystyle\sum_{j=1}^{k} 1$, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,2^k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k$.
2. Calculer alors la somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,2^k$