Fonctions – calcul de dérivées

Remarque 1 Une formule est toujours accompagnée d'un **DOMAINE DE VALIDITÉ** !!!!

I. Opérations algébriques

Proposition 1 Soient f et g deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.
(1) $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f'+g'$.
(2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
(3) $f\,g$ est dérivable sur I et $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$.
(4) Si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$.

Dérivées des fonctions usuelles:

Fonction	Ensemble de définition	Ensemble de dérivation	Dérivée
x^n	$\mathbb{R}$ si $n\in\mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $n<0$	$\mathbb{R}$ si $n\in\mathbb{N}$ $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ si $n<0$	$n\,x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$[0,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$]0,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$]0,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$\alpha\,x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Exemple 1 $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est dérivable sur chaque intervalle de $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ en tant que:
$*$ quotient de fonctions dérivables (dont le dénominateur ne s'annule pas):

$$\tan' = \ldots$$

$*$ produit de fonctions dérivables: $\tan' = \ldots$
Conclusion:

Exercice 1 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x}\,(x^2 - x + 1)$
2. $f(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^x + 1$
3. $g(x) = 5\mathrm{e}^x - x^2$
4. $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$
5. $h(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$
6. $u(x) = x^2 \cos x$
7. $v(x) = \frac{1}{\sin x}$

Exercice 2 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x} + 2x$
2. $f(x) = x - \ln x - \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = (x-2)\,e^x + x + 2$
4. $g(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 5x + 1}$
5. $h(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x+3}$
6. $u(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^3+2x}$
7. $v(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$
8. $g(x) = \dfrac{x \ln x}{1+x}$

II. Composée

Proposition 2 Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I, g dérivable sur un intervalle J avec $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$.

Exemple 2 : composées usuelles.
(1) Si f est dérivable sur I alors $\forall n \in \mathbb{N}$, f^n est dérivable sur …… et $(f^n)' = \ldots$.
(2) Si f est dérivable sur I alors $\sin f$ et $\cos f$ sont dérivables sur …… et $(\sin f)' =$ et $(\cos f)' = \ldots$.
(3) Si f est dérivable sur I alors e^f est dérivable sur …… et: $(e^f)' = \ldots$.
(4) Si f est dérivable sur I et $\forall x \in I$, alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{f})' = \ldots$.
(5) Si f est dérivable sur I et $\forall x \in I$, alors $\ln f$ est dérivable sur I et $(\ln f)' = \ldots$.

Remarque 2 :ATTENTION!
Ces propositions donnent une condition SUFFISANTE mais pas une condition NÉCESSAIRE!!
Il est possible de faire des opérations sur des fonctions non dérivables et d'obtenir une fonction dérivable.
contre-exemple: $f(x) = \sqrt{x^4} = x^2$ est dérivable en 0!
contre-exemple: $g(x) = (\sqrt{x})^2 = x$ est dérivable en 0!

Dérivées des composées usuelles

Fonction	Ensemble de définition	Ensemble de dérivation	Dérivée
u^n $(n \in \mathbb{N})$	$\mathcal{D}_u$	$\mathcal{D}_{u'}$	$n\,u'\,u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u}$	$u \neq 0$ sur I	$I \subset \mathcal{D}_{u'}$ et $u \neq 0$ sur I	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$u \geq 0$ sur I	$I \subset \mathcal{D}_{u'}$ et $u > 0$ sur I	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln\lvert u\rvert$	$u \neq 0$ sur I	$I \subset \mathcal{D}_{u'}$ et $u \neq 0$ sur I	$\frac{u'}{u}$
e^u	$\mathcal{D}_u$	$\mathcal{D}_{u'}$	$u'\,e^u$
u^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$u > 0$ sur I	$I \subset \mathcal{D}_{u'}$ et $u > 0$ sur I	$\alpha\,u'\,u^{\alpha-1}$
$\sin u$	$\mathcal{D}_u$	$\mathcal{D}_{u'}$	$u'\,\cos u$
$\cos u$	$\mathcal{D}_u$	$\mathcal{D}_{u'}$	$-u'\,\sin u$
$\tan u$	$u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ sur I	$I \subset \mathcal{D}_{u'}$ et $u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ sur I	$u'\,\left(1+\tan^2 u\right) = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

Exercice 3 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2e^{-x} + 6x^3 - 3e^5$
2. $f(x) = -8xe^{-3x+1}$
3. $f(x) = x\ \sin(-3x+4)$
4. $g(x) = \sqrt{x-2}\,(x^2-1)$
5. $h(x) = 4\cos x + \cos^2 x$
6. $u(x) = \cos(-2x+4)\ \sin(-3x+2)$
7. $v(x) = \sin^2(2x)$
8. $g(x) = e^{-x}\ (-\cos x + \sin x + 1)$
9. $u(x) = \dfrac{\sqrt{3-x}}{x^3}$
10. $v(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$
11. $u(x) = (3x^2-x)\ \ln(x-2)$
12. $u(x) = e^{3\ \sin(2x)}$
13. $u(x) = \dfrac{2x^2+3x}{\ln x}$

Exercice 4 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos(2x+1)$
2. $g(x) = \sin(\sqrt{x})$
3. $h(x) = e^{\cos x}$
4. $u(x) = (3x^2+4x-6)^{-4}$
5. $v(x) = (\tan x - 1)^2$
6. $w(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$
7. $s(x) = \sqrt{\ln x}$
8. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\,e^{2x}}{x^2+1}$
9. $g(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\cos(3x)}$
10. $h(x) = \ln(\sqrt{x^2+3})$
11. $u(x) = \sqrt{e^{-2x+1}}$
12. $v(x) = \big(\sin(x^2+5x+1)\big)^2$
13. $w(x) = \left(\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}\right)^3.$
14. $f(x) = \ln|x^2-3x+2|$
15. $g(x) = xe^{-\frac{3}{|x|}}$
16. $h(x) = \sqrt{|1-x^2|}$

Exercice 5 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $g(x) = \dfrac{1}{x}\,e^{-\frac{1}{x}}.$
2. $v(x) = \ln(1+e^x).$
3. $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$
4. $w(x) = \exp\left(1 - \dfrac{1}{(\ln|x|)^2+1}\right)$
5. $f(x) = \cos(3x)\ \cos^3 x$
6. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\sin x}$
7. $u(x) = (3\cos x - \sin x)^3$
8. $u(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$