Étude de fonctions

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Rappels sur les fonctions réelles d'une variable réelle

1.1 Vocabulaire

Définition 1 :
• *f est une* **fonction numérique d'une variable réelle** *s'il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ tel que à chaque réel $x \in A$ corresponde un* **unique** *réel noté $f(x)$.*
• *A est appelé* **ensemble de définition** *de f, et est noté $\mathcal{D}_f$.*

Notation 1 :
$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ ou $\begin{array}{rcl} f:\mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$, ou $(x \mapsto f(x))$ s'il n'y a aucune ambiguité sur l'ensemble de définition de f.

Remarque 1 ATTENTION A LA REDACTION!
Écrire “la fonction $f(x)$” est incorrect, on dit la fonction f ou $(x \mapsto f(x))$.

Définition 2 : *On appelle* **graphe** *ou* **courbe représentative** *d'une fonction f l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$, $x \in \mathcal{D}_f$; et on le note $\mathcal{C}_f$.*

Exemple 1 :
• L'identité sur $\mathbb{R}$: $Id_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$.
• $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est une fonction numérique et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Considérons la fonction numérique $\begin{array}{rcl} g:[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $\mathcal{D}_g = [0, +\infty[$.
On remarque que $\mathcal{D}_g = [0, +\infty[\subset \mathcal{D}_f$ et $\forall x \in \mathcal{D}_g$, $f(x) = g(x)$. On dit que g est**la restriction de f à** $[0, +\infty[$.
Dans la suite du cours, par abus de notation, on notera $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

La détermination de l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ est la première étape importante dans l'étude d'une fonction

1.2 Opérations sur les fonctions réelles

Définition 3 *Deux fonctions f et g sont* **égales** *ssi $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$ et $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathcal{D}_f (= \mathcal{D}_g)$.*

Définition 4 *Soient f et g deux fonctions respectivement définies sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.*
(1) La **somme** *de f et g est la fonction notée $f + g$ définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)\,, \forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\,.$$

(2) Le **produit** *de λ par f est la fonction notée λf définie sur $\mathcal{D}_f$ par:*

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)\,,\ \forall x \in \mathcal{D}_f\,.$$

(3) Le **produit** *de f et g est la fonction notée $f\,g$ définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par:*

$$(f\,g)(x) = f(x)\,g(x)\,,\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\,.$$

(4) Soit $I = \{x \in \mathcal{D}_g / g(x) \neq 0\}$. Alors le **quotient** *de f par g est la fonction notée $\dfrac{f}{g}$ définie sur $\mathcal{D}_f \cap I$ par:*

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\,,\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap I\,.$$

(5) Soit $I = \{x \in \mathcal{D}_f / f(x) \in \mathcal{D}_g\}$. Alors la **composée** *de f par g est la fonction notée $g \circ f$ définie sur I par:*

$$g \circ f(x) = g(f(x))\,,\ \forall x \in I\,.$$

Diagramme de $g \circ f$:

Remarque 2 :
Dans la composée de f par g, f "agit" AVANT g (de droite à gauche dans la notation $g \circ f$).

Exemple 2 :
(1) On considère les fonctions:

$$\begin{array}{rcl} \ln : \ldots\ldots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \exp : \ldots\ldots & \longrightarrow & \ldots\ldots \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array}$$

Les composées $\ln \circ \exp$ et $\exp \circ \ln$ sont-elles bien définies? Si oui:

$$\forall x \in \ldots\ldots\,,\ \ln \circ \exp(x) = \ldots \quad \text{et } \exp \circ \ln(x) = \ldots$$

(2) Soit f une application de E dans F:

$$id_F \circ f = \ldots \quad \text{et } f \circ id_E = \ldots$$

Remarque 3 ATTENTION: $\boxed{\text{la composition n'est pas commutative!}}$
contre-exemple: Soient les applications:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \text{ et } \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

$\forall x \in \ldots\ldots$, $f \circ g(x) = \ldots$ MAIS $\forall x \in \ldots\ldots$, $g \circ f(x) = \ldots$

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 :
Afin de déterminer l'ensemble de définition d'une fonction f, penser à bien étudier:
• les quotients (dénominateurs non nuls):
→ équations à résoudre.
• Les composées:
→ composées "usuelles":
∗ $\ln(f(x))$ bien définie si …
∗ $\sqrt{f(x)}$ bien définie si …
→ équations et/ou inéquations à résoudre.

Exemple 3 :
(1) $f(x) = \dfrac{3x+1}{e^x + e^{-x}}$.
→ Il s'agit d'un quotient. Que peut-on dire du dénominateur?

Donc: $\boxed{\mathcal{D}_f = \ldots\ldots}$
(2) $g_1(x) = \ln(x^2 - x + 1)$.

$\rightarrow$ Il s'agit d'une composée: $g_1(x)$ existe ssi

Donc: $\boxed{\mathcal{D}_{g_1} = \ldots\ldots}$

(3) $g_2(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$.

$\rightarrow$ A vous:

(4) $h(x) = \dfrac{\ln x - 2}{e^x - e^{-x}}$.

$\rightarrow$ Il y a un quotient , mais attention au ln! $h(x)$ existe ssi

Donc $\boxed{\mathcal{D}_h = \qquad\qquad}$

2 Périodicité et symétries

2.1 Fonctions périodiques

Définition 5 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique et $T > 0$.*
*f est T-**périodique** si: $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $x + T \in \mathcal{D}_f$ et $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}_f$. On dit que T est une période de f.*

POINT METHODE 1 :
On restreint l'étude de f sur un intervalle d'amplitude T (en général: $\mathcal{D}_f \cap [0, T]$ ou $\mathcal{D}_f \cap [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$), puis on récupère toute la courbe (repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$) par des translations de vecteurs $kT\vec{i}$:

CAPACITÉ EXIGIBLE 2 Parmi les fonctions usuelles, dire celles qui sont périodiques, et préciser leur période.

2.2 Fonctions paires et impaires

Définition 6 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique.*
*f est **paire** si: $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}_f$.*
*f est **impaire** si: $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}_f$.*

Remarque 4 ATTENTION!
Pour prouver la parité/imparité d'une fonction, il ne faut pas oublier de COMMENCER par vérifier que $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$, i.e que $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0.

CAPACITÉ EXIGIBLE 3 Parmi les fonctions usuelles, dire celles qui sont paires / impaires.

Lecture graphique 1 :
f est paire ssi (O_y) (axe des ordonnées) est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ et f est impaire ssi l'origine du repère O est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. (repère orthogonal):

POINT METHODE 2 : La parité d'une fonction sert à <u>restreindre</u> son intervalle d'étude: IL FAUT Y PENSER!
• Si f est PAIRE, il suffit d'étudier f sur $\mathcal{D}_f \cap [0, +\infty[$, et on récupère toute la courbe par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
• Si f est IMPAIRE, il suffit d'étudier f sur $\mathcal{D}_f \cap [0, +\infty[$, et on récupère toute la courbe par symétrie de centre O.

Remarque 5 : Une fonction impaire s'annule toujours en 0, quand elle est définie en ce point.

3 (Stricte) monotonie

3.1 Définition

Définition 7 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, I un* $\boxed{\textit{intervalle non vide}}$ *de $\mathbb{R}$, $I \subset \mathcal{D}_f$.*
(1) f est **croissante** *sur I si: $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.*
f est **strictement croissante** *sur I si: $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.*
(2) f est **décroissante** *sur I si: $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.*
f est **strictement décroissante** *sur I si: $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.*
(3) f est **(strictement) monotone** *sur I si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante sur I.*

Exemple 4 :
$*$ La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, mais pas monotone sur $\mathbb{R}$.
$*$ La fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$, mais pas strictement croissante.

Remarque 6 ATTENTION!! Une fonction est (strictement) monotone sur un INTERVALLE.
Dire que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$ est FAUX!! En effet: $-1 < 2 \not\Rightarrow -1 > \frac{1}{2}$...
Par contre, on peut dire que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ $\boxed{\text{et sur}}$ $]0, +\infty[$.

Remarque 7 :
(1) Une fonction à la fois croissante et décroissante sur un intervalle I est dite **constante**:

$$\boxed{\exists c \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) = c}$$

Et non $\forall x \in I$, $\exists c \in \mathbb{R} / f(x) = c\ldots$ (pourquoi?)

(2) ATTENTION!!! Une fonction non croissante sur I n'est pas une fonction décroissante sur I!
Contre-exemple: La fonction carrée sur $\mathbb{R}$.

3.2 Propriétés

Remarque 8 : Étude de la réciproque.
Supposons f croissante sur un intervalle I. Pour tous x et y deux éléments de I, si $f(x) \leqslant f(y)$, a-t-on $x \leqslant y$?
Pensez à la fonction partie entière...

Et maintenant, si on suppose f strictement croissante sur I?

Conclusion:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si } f \textbf{ STRICTEMENT} \text{ croissante sur un intervalle } I\text{: } \forall x,y\in I,\ x\leqslant y \iff f(x)\leqslant f(y),\\ \text{si } f \textbf{ STRICTEMENT} \text{ décroissante sur un intervalle } I\text{: } \forall x,y\in I,\ x\leqslant y \iff f(x)\geqslant f(y).\end{array}}$$

POINT METHODE 3 : Cette propriété des fonctions strictement monotones va nous permettre de résoudre des inéquations.

Proposition 1 **:**
(1) La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).
(2) Soient f une fonction et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si $\lambda > 0$ et f croissante (resp. décroissante) alors λf est croissante (resp. décroissante).
Si $\lambda < 0$ et f croissante (resp. décroissante) alors λf est décroissante (resp. croissante).
(3) La composée de deux fonctions croissantes est croissante.
(4) La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.
(5) La composée de deux fonctions décroissantes est croissante.

Preuve:

■

Exemple 5 Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier la monotonie des fonctions $(x \mapsto e^{\alpha\ \ln(x)})$ sur ...

3.3 Lien avec la dérivée (des fonctions dérivables)

POINT METHODE 4 :
SI la fonction est dérivable sur un **intervalle** I, **le SIGNE de la dérivée donne la MONOTONIE de la fonction sur** I**:** soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

(1) Si $f' \geqslant 0$ sur I alors f est croissante sur I
Si $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, alors f est strictement croissante sur I
(2) Si $f' \leqslant 0$ sur I alors f est décroissante sur I .
Si $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I
(3) Si $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$ alors f est constante sur I .

Remarque 9 Pour l'instant, on ne parle pas de la réciproque. Cependant, ATTENTION AU CAS STRICT!!!
Si $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, alors f est strictement croissante sur I, mais la RÉCIPROQUE EST FAUSSE!
contre-exemple: $(x \mapsto x^3)$ sur $\mathbb{R}$.

On admet aussi les résultats suivants :

1. si $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

2. Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, le signe de f' sur $]a,b[$ donne la monotonie de f sur $[a,b]$.

   Exemple 6 La fonction racine est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$, $\forall x > 0$.
   Donc la fonction racine est (strictement) croissante sur $[0,+\infty[$.

3. Il est très important de se trouver sur un INTERVALLE...

Rappel 1 On rappelle les formules de dérivations :
Soient f et g deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.
(1) $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.
(2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
(3) $f\,g$ est dérivable sur I et $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$.
(4) Si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$.
Dérivées des fonctions usuelles:

Fonction	Ensemble de définition	Ensemble de dérivation	Dérivée
x^n	$\mathbb{R}$ si $n\in\mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $n<0$	$\mathbb{R}$ si $n\in\mathbb{N}$ $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ si $n<0$	$n\,x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$[0,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$]0,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$]0,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$\alpha\,x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I, g dérivable sur un intervalle J avec $f(I) \subset J$.
Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$.

Dérivées des composées usuelles:

Fonction	Ensemble de définition	Ensemble de dérivation	Dérivée
u^n $(n \in \mathbb{N})$	$\mathcal{D}_u$	$\mathcal{D}_{u'}$	$n\,u'\,u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u}$	$u \neq 0$ sur I	$I \subset \mathcal{D}_{u'}$ et $u \neq 0$ sur I	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$u \geq 0$ sur I	$I \subset \mathcal{D}_{u'}$ et $u > 0$ sur I	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln\|u\|$	$u \neq 0$ sur I	$I \subset \mathcal{D}_{u'}$ et $u \neq 0$ sur I	$\frac{u'}{u}$
e^u	$\mathcal{D}_u$	$\mathcal{D}_{u'}$	$u'\,e^u$
u^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$u > 0$ sur I	$I \subset \mathcal{D}_{u'}$ et $u > 0$ sur I	$\alpha\,u'\,u^{\alpha-1}$
$\sin u$	$\mathcal{D}_u$	$\mathcal{D}_{u'}$	$u'\,\cos u$
$\cos u$	$\mathcal{D}_u$	$\mathcal{D}_{u'}$	$-u'\,\sin u$
$\tan u$	$u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ sur I	$I \subset \mathcal{D}_{u'}$ et $u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ sur I	$u'\,\left(1 + \tan^2 u\right) = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$