

# Étude de fonctions – calculs préparatoires

## I. Ensembles de définitions

**Exercice 1** On considère les fonctions  $f(x) = x^2 - 1$ , pour tout réel  $x$ ; et  $g(x) = \sqrt{x}$ ,  $\forall x \geq 0$ . Déterminer les ensembles de définition et les expressions de  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

**Exercice 2** On définit deux fonctions  $f$  et  $g$  définies par:  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$  et  $g(x) = x^2$ .

1. Donner les ensembles de définition de  $f$  et  $g$ .
2. Déterminer  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .
3. Calculer l'image de  $3x$  par  $f$  et l'image de  $x^3$  par  $g$ .

**Exercice 3** Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes:

$$1. \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 4x + 12}$$

$$2. \quad g(x) = \sin\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$3. \quad h(x) = \frac{\ln(x-1)}{(\tan^2 x) + 1}$$

$$4. \quad u(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - x - 2}$$

$$5. \quad v(x) = \cos\left(x \left(\sqrt{\ln x} + 1\right)\right)$$

$$6. \quad f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$$

$$7. \quad g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$8. \quad h(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$$

$$9. \quad u(x) = \frac{\ln(\ln x)}{e^x - 1}$$

$$10. \quad f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$$

$$11. \quad g(x) = \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}$$

$$12. \quad h(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$

$$13. \quad f(x) = \ln|x - 2|$$

$$14. \quad g(x) = \ln|e^x - e^{-x} + 2|$$

$$15. \quad h(x) = \ln(|\cos x|^3)$$

$$16. \quad f(x) = \ln\left(\frac{x^x - 1}{x^x + 1}\right)$$

$$17. \quad g(x) = (x^2 + x + 1)^{\ln x}$$

## II. Réduction d'intervalle d'étude

**Exercice 4** Étudier la parité éventuelle des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition

$$1. \quad f(x) = \tan^2(x) + \cos(2x)$$

$$2. \quad g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$3. \quad h(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

$$4. \quad u(x) = \frac{\tan x}{x^3 + x}$$

## III. Résolution d'inéquations

**Exercice 5** Résoudre les inéquations suivantes:

$$1. \quad \sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} < 0$$

$$2. \quad \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} < 1$$

$$3. \quad x < \sqrt{2x+3}$$

$$4. \quad \sqrt{x^2 + 1} - x < \frac{1}{2}$$

## IV. Calcul de dérivées

**Exercice 6** Calculer (en justifiant l'ensemble de dérivation) la dérivée des fonctions suivantes:

$$1. \quad f(x) = (\sqrt{x} + 1)^{\ln x}$$

$$2. \quad g(x) = (x+1)^{\cos x}$$

$$3. \quad h(x) = (1+x+x^2)^{x+x^2}$$