

Étude de fonctions – calculs préparatoires

I. Ensembles de définitions

Exercice 1 On considère les fonctions $f(x) = x^2 - 1$, pour tout réel x ; et $g(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \geq 0$. Déterminer les ensembles de définition et les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2 On définit deux fonctions f et g définies par: $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ et $g(x) = x^2$.

1. Donner les ensembles de définition de f et g .
2. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.
3. Calculer l'image de $3x$ par f et l'image de x^3 par g .

Exercice 3 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes:

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 4x + 12}$ | 6. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ | 12. $h(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ |
| 2. $g(x) = \sin\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ | 7. $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ | 13. $f(x) = \ln x - 2 $ |
| 3. $h(x) = \frac{\ln(x - 1)}{(\tan^2 x) + 1}$ | 8. $h(x) = \ln\left(\frac{x + 1}{2x - 3}\right)$ | 14. $g(x) = \ln e^x - e^{-x} + 2 $ |
| 4. $u(x) = \frac{\sqrt{x + 1}}{x^2 - x - 2}$ | 9. $u(x) = \frac{\ln(\ln x)}{e^x - 1}$ | 15. $h(x) = \ln(\cos x ^3)$ |
| 5. $v(x) = \cos\left(x\left(\sqrt{\ln x} + 1\right)\right)$ | 10. $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$ | 16. $f(x) = \ln\left(\frac{x^x - 1}{x^x + 1}\right)$ |
| | 11. $g(x) = \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}$ | 17. $g(x) = (x^2 + x + 1)^{\ln x}$ |

II. Réduction d'intervalle d'étude

Exercice 4 :

- | | | |
|-------------------------------------|---|------------------------------------|
| 1. $f(x) = \tan^2(x) + \cos(2x)$ | 3. $h(x) = \ln\left \frac{x+1}{x-1}\right $ | 4. $u(x) = \frac{\tan x}{x^3 + x}$ |
| 2. $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ | | |

Exercice 5 : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par: $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$. Montrer que f est 1-périodique. Tracer alors les graphes de f et de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x)^2$.

III. Résolution d'inéquations

Exercice 6 Résoudre les inéquations suivantes:

- | | | | |
|-----------------------------------|---------------------------------|----------------------|-------------------------------------|
| 1. $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} < 0$ | 2. $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} < 1$ | 3. $x < \sqrt{2x+3}$ | 4. $\sqrt{x^2+1} - x < \frac{1}{2}$ |
|-----------------------------------|---------------------------------|----------------------|-------------------------------------|

IV. Calcul de dérivées

Exercice 7 Calculer (en justifiant l'ensemble de dérivation) la dérivée des fonctions suivantes:

- | | | |
|------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $f(x) = (\sqrt{x} + 1)^{\ln x}$ | 2. $g(x) = (x + 1)^{\cos x}$ | 3. $h(x) = (1 + x + x^2)^{x+x^2}$ |
|------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|