Étude de fonctions – calculs préparatoires

I. Ensembles de définitions

Exercice 1 On considère les fonctions $f(x) = x^2 - 1$, pour tout réel x; et $g(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \ge 0$. Déterminer les ensembles de définition et les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2 On définit deux fonctions f et g définies par: $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ et $g(x) = x^2$.

- 1. Donner les ensembles de définition de f et g.
- 2. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.
- 3. Calculer l'image de 3x par f et l'image de x^3 par g.

Exercice 3 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes:

1.
$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 4x + 12}$$

6.
$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$$

7. $q(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

12.
$$h(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$

$$2. \ g(x) = \sin\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

8.
$$h(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$$

13.
$$f(x) = \ln|x - 2|$$

14. $g(x) = \ln|e^x - e^{-x} + 2|$

3.
$$h(x) = \frac{\ln(x-1)}{(\tan^2 x) + 1}$$

9.
$$u(x) = \frac{\ln(\ln x)}{e^x - 1}$$

15.
$$h(x) = \ln(|\cos x|^3)$$

4.
$$u(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - x - 2}$$

10.
$$f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$$

16.
$$f(x) = \ln\left(\frac{x^x - 1}{x^x + 1}\right)$$

5.
$$v(x) = \cos\left(x\left(\sqrt{\ln x} + 1\right)\right)$$

11.
$$g(x) = \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}$$

17.
$$g(x) = (x^2 + x + 1)^{\ln x}$$

II. Réduction d'intervalle d'étude

Exercice 4:

2. $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1.
$$f(x) = \tan^2(x) + \cos(2x)$$

$$3. \ h(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

$$4. \ u(x) = \frac{\tan x}{x^3 + x}$$

III. Résolution d'inéquations

Exercice 5 Résoudre les inéquations suivantes:

1.
$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} < 0$$

2.
$$\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} < 1$$

3.
$$x < \sqrt{2x+3}$$

4.
$$\sqrt{x^2+1}-x<\frac{1}{2}$$

IV. Calcul de dérivées

Exercice 6 Calculer (en justifiant l'ensemble de dérivation) la dérivée des fonctions suivantes:

1.
$$f(x) = (\sqrt{x} + 1)^{\ln x}$$

2.
$$g(x) = (x+1)^{\cos x}$$

1

3.
$$h(x) = (1 + x + x^2)^{x+x^2}$$