Étude de fonctions

I. Variations

Exercice 1 Étudier les fonctions suivantes sur leur ensemble de définition:

1. $f(x) = x - \ln x - \dfrac{1}{x}$.
2. $g(x) = \dfrac{1}{x}\, e^{-\frac{1}{x}}$.
3. $v(x) = \ln(1 + e^x)$.
4. $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
5. $w(x) = \exp\left(1 - \dfrac{1}{(\ln|x|)^2 + 1}\right)$.
6. $u(x) = x^{-\ln x}$.

Exercice 2 $(*)$
On considère les fonctions f et g respectivement définies sur $\mathbb{R}^*$ et $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(\frac{1 + e^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \text{ et } g(x) = \frac{x \ln x}{1 + x} - \ln\left(\frac{1 + x}{2}\right).$$

1. Justifier les ensembles de définition des fonctions f et g.
2. Etudier les variations de g sur $]0, +\infty[$. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel $x > 0$.
3. Montrer que : $\forall x \neq 0,\ f'(x) = \dfrac{f(x)\, g(e^x)}{x^2}$. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^*$.
4. Étudier les limites de f quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

II. Inégalités par étude de fonctions

Exercice 3 Montrer que:

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+ ,\ \sin x \leqslant x$
2. $\forall x \in \mathbb{R} ,\ \cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.
3. $\forall x \geqslant 0 ,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x$.

Exercice 4 Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ (x - 2)\, e^x + x + 2 \geqslant 0$.
On pourra étudier la fonction g définie par $g(x) = (x - 2)\, e^x + x + 2$ sur $[0, +\infty[$

Exercice 5 Montrer que pour tout réel $x \in]0, 1[$, $x^x\, (1 - x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

III. Étude complète de fonctions

Exercice 6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(3x)\, \cos^3 x\, .$$

1. Montrer que la fonction f est paire et π-périodique.
   Sur quel intervalle I peut-on se contenter d'étudier f? On précisera les symétries utilisées pour récupérer toute la courbe représentative de f.
2. Vérifier que $f'(x)$ est du signe de $-\sin(4x)$, et en déduire le sens de variations de f sur I.
3. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 7 On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}\, .$$

1. Justifier que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. (a) Vérifier que f est 2π-périodique.

(b) Comparer $f(x)$ et $f(\pi - x)$, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.
En déduire que la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de Γ.

3. Etudier f sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. En déduire une allure graphique de Γ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. En précisant les symétries utilisées, donner une allure graphique de Γ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$ puis sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}+2\pi, \dfrac{3\pi}{2}+2\pi\right[$.