

Partie entière

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Définition

Définition 1 On appelle **partie entière** d'un nombre réel x , et on note $\lfloor x \rfloor$, le plus grand entier inférieur ou égal à x .

exemples :

$$\lfloor 2,2 \rfloor = 2, \lfloor \pi \rfloor = 3.$$

ATTENTION! $\lfloor -1,7 \rfloor = -2$, et non -1 ...

Remarque 1 :

(1) On admet l'existence et l'unicité de la partie entière.

$$(2) \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}}$$

Exercice 1 Langage python : fonction prédéfinie `floor()` du module `math`

Lecture graphique 1 : fonction en escalier.

Remarque 2 • La partie entière est croissante sur \mathbb{R} (et non strictement croissante !!), soit :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor}$$

• Pour tout réel x , $\lfloor x \rfloor$ est le **plus grand ENTIER** inférieur ou égal à x , donc

$$\boxed{\text{si on trouve un ENTIER } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } k \leq x \text{ alors } k \leq \lfloor x \rfloor}$$

• On pense enfin aux **encadrements**, c'est la proposition suivante :

2 Propriétés

Proposition 1 (caractérisation de la partie entière):

$$\boxed{\text{Soit } k \in \mathbb{Z}. \lfloor x \rfloor = k \iff k \leq x < k + 1}$$

"Preuve" : Il y a deux informations dans la partie entière d'un réel x :

• $\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur ou égal à x , donc $\lfloor x \rfloor \leq x$.

• et c'est le plus grand, donc tous les entiers plus grands que $\lfloor x \rfloor$ ne peuvent être inférieurs à x , donc $x < \lfloor x \rfloor + 1$

Réciproquement, soit un **ENTIER** $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k + 1$.

• $k \leq x$, or $\lfloor x \rfloor$ est le **plus grand** entier inférieur ou égal à x donc $k \leq \lfloor x \rfloor$.

- $x < k + 1$ donc $\lfloor x \rfloor \neq k + 1$, et donc $\lfloor x \rfloor < k + 1$.

De plus, k et $k + 1$ sont deux entiers consécutifs (il n'y a pas d'entiers entre eux), donc on ne peut avoir $k < \lfloor x \rfloor < k + 1$, ce qui implique que $k = \lfloor x \rfloor$.

Conclusion : $\lfloor x \rfloor = k \iff k \leq x < k + 1$

■

POINT METHODE 1 : Caractérisation de la partie entière.

Dans les exercices, on calcule ou on utilise une partie entière via sa caractérisation, i.e. des encadrements (penser à faire un dessin!):

$$\boxed{x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1}$$

Proposition 2 :

(1) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1}$ Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

(2) $x \in \mathbb{Z} \iff x = \lfloor x \rfloor$.