Partie entière

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Définition

Définition 1 *On appelle* **partie entière** *d'un nombre réel x, et on note $\lfloor x \rfloor$, le plus grand entier inférieur ou égal à x.*

exemples :
$\lfloor 2,2 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$.
ATTENTION! $\lfloor -1,7 \rfloor = -2$, et non -1...

Remarque 1 :
(1) On admet l'existence et l'unicité de la partie entière.
(2) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}}$

Exercice 1 Langage `python` : fonction prédéfinie `floor()` du module `math`

Lecture graphique 1 : fonction en escalier.

Remarque 2 :

- La partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$ (et non strictement croissante !!), soit :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}\,,\ x \leqslant y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor}$$

- Pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor$ est **le plus grand ENTIER** inférieur ou égal à x, donc

$$\boxed{\text{si on trouve un ENTIER } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } k \leqslant x \text{ alors } k \leqslant \lfloor x \rfloor}$$

- On pense enfin aux **encadrements**, c'est la proposition suivante :

2 Propriétés

Proposition 1 **(caractérisation de la partie entière):**
$\boxed{\textit{Soit } k \in \mathbb{Z}.\ \lfloor x \rfloor = k \iff k \leqslant x < k+1}$

"Preuve" : Il y a deux informations dans la partie entière d'un réel x:

- $\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur ou égal à x, donc $\lfloor x \rfloor \leqslant x$.
- et c'est le plus grand, donc tous les entiers plus grands que $\lfloor x \rfloor$ ne peuvent être inférieurs à x, donc $x < \lfloor x \rfloor + 1$

Réciproquement, soit un **ENTIER** $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leqslant x < k+1$.

- $k \leqslant x$, or $\lfloor x \rfloor$ est le **plus grand** entier inférieur ou égal à x donc $k \leqslant \lfloor x \rfloor$.

- $x < k+1$ donc $\lfloor x \rfloor \neq k+1$, et donc $\lfloor x \rfloor < k+1$.
  De plus, k et $k+1$ sont deux entiers consécutifs (il n'y a pas d'entiers entre eux), donc on ne peut avoir $k < \lfloor x \rfloor < k+1$, ce qui implique que $k = \lfloor x \rfloor$.

Conclusion : $\lfloor x \rfloor = k \iff k \leqslant x < k+1$

∎

POINT METHODE 1 : Caractérisation de la partie entière.
Dans les exercices, on calcule ou on utilise une partie entière via sa caractérisation, i.e. des encadrements (penser à faire un dessin!):

$$\boxed{x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1}$$

***Proposition 2* :**
(1) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1}$ *Donc* $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
(2) $x \in \mathbb{Z} \iff x = \lfloor x \rfloor$.