Calcul intégral

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Primitives d'une fonction continue

Définition 1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On dit que F* **est une primitive de f sur** *I si F est dérivable sur I et $F' = f$.*

Exemple 1 :

* ln est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.
* sin est une primitive de cos sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1 f étant continue sur I, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I c'est-à-dire : F est dérivable sur I et sa dérivée $F' = f$ est continue sur I.

Théorème 1 **(théorème d'existence), admis:** *Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.*

Remarque 2 Les primitives des fonctions usuelles sont à connaître par coeur: cf tableau.
Mais ATTENTION! On ne peut pas toujours exprimer une primitive à l'aide des fonctions usuelles!!
Par exemple, il a fallu introduire la fonction logarithme pour pouvoir exprimer une primitive de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$.

Proposition 1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. f admet une infinité de primitives sur I; deux primitives diffèrent à une constante près.*
En d'autres termes: soit F une primitive de f sur I (théorème d'existence). Alors l'ensemble des primitives de f sur I est de la forme: $\{F + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Preuve:

∎

Remarque 3 :
(1) Importance d'être sur un intervalle!!
La constante peut varier d'un intervalle à l'autre... Exemple :

$$\forall x \neq 0\,,\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \left| \begin{array}{ll} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$$

(2) Pour obtenir une primitive *unique* sur un intervalle, on fixe la constante en imposant une condition (cf condition initiale en physique), du style $F(x_0) = y_0$.

Exemple 2 ln est l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Proposition 2 *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, admettant respectivement F et G comme primitive sur I. Alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λF est une primitive de λf sur I.*

Preuve: $(F + G)' = F' + G' = f + g$ et $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$...

∎

Remarque 4 :
(1) Cette propriété est équivalente à: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.
(2) ATTENTION AU PRODUIT!!! $F\,G$ n'est pas une primitive de $f\,g$!!
En effet: $(F\,G)' = f\,G + F\,g$...
(3) Pour une composée, cf plus loin: formule du changement de variable.

2 Définition de l'intégrale

2.1 Lien entre primitives et intégrale

Définition 2 *Soient f une fonction continue sur un intervalle I, $a, b \in I$. Soit F une primitive (quelconque) de f sur I.*

On appelle **intégrale de f de a à b** *le nombre réel $F(b) - F(a)$ que l'on note:* $\boxed{F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt}$

Dans les calculs, la différence $F(b) - F(a)$ est notée $[F(t)]_a^b$.

Remarque 5 :
(1) Cette définition a bien un sens: **l'intégrale ne dépend pas du choix de la primitive:**

(2) On a les relations: $\boxed{\int_b^a f(t)\, dt = -\int_a^b f(t)\, dt}$ et $\boxed{\int_a^a f(t)\, dt = 0}$

$\int_b^a f(t)\, dt = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(t)\, dt$ et $\int_a^a f(t)\, dt = F(a) - F(a) = 0$.

(3) t est appelée **variable d'intégration** (cf compteur pour $\sum$): elle est muette donc $\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(x)\, dx$.

On note parfois: $\int_a^b f$.

Exemple 3 $\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{ne dépend pas de } t} dt = [f(x)\, t]_a^b = f(x)\,(b-a) = f(x) \int_a^b dt$, donc $\int_a^b f(x)\, dt \neq \int_a^b f(t)\, dt$!!!!

2.2 Premières propriétés de l'intégrale

Proposition 3 **(linéarité):** *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, $a, b \in I$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors:*
$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ *et* $\int_a^b (\lambda\, f) = \lambda \int_a^b f$.

Preuve:

■

Remarque 6 Propriété équivalente à : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\int_a^b (\lambda\, f + \mu\, g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$

Proposition 4 **(relation de Chasles):** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous $a, b, c \in I$:*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,.$$

Preuve:

■

2.3 Interprétation géométrique de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

- Si f est *positive* sur $[a, b]$. Alors $\displaystyle\int_a^b f$ est l'aire du domaine délimité par les droites $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.

- Si f est *négative* sur $[a, b]$. $-f$ est positive donc $\displaystyle\int_a^b (-f)$ est l'aire du domaine délimité par les droites $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et la courbe symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (O_x). Or $\displaystyle\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$, donc $\displaystyle\int_a^b f$ est l'opposé de l'aire du domaine délimité par les droites $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et la courbe symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (O_x).

- *Si f change de signe sur* $[a, b]$. Alors $\displaystyle\int_a^b f$ est la différence entre la somme des aires des domaines délimités par $\mathcal{C}_f$ et au dessus de (O_x) et la somme des aires de ceux délimités par $\mathcal{C}_f$ et en dessous de (O_x).

3 Calcul intégral

3.1 Recherche de primitives usuelles

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 :

1. Puisque l'intégrale ne dépend pas du choix de la primitive, on **choisit** en général la constante égale à 0.
2. *Coeur de la méthode:*
   Faire apparaître une dérivée u' afin de se ramener aux primitives de fonctions du type:

$$u'\,e^u \text{ ou } u'\,u^n \text{ ou } \frac{u'}{2\sqrt{u}} \text{ ou } \frac{u'}{u^n} \text{ ou } \frac{u'}{1+u^2} \text{ etc... (voir le tableau des primitives usuelles)}$$

3. Puisque l'intégrale est linéaire, les constantes multiplicatives ne gênent jamais en intégration.
   (elles "sortent" de l'intégrale)

Exemple 4 :

(1) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \dots$

(2) $J = \displaystyle\int_0^1 x\, e^{x^2}\, dx = \ldots$

(3) Donner une primitive de f sur $]-1, 1[$: $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

3.2 Intégration par parties

Théorème 2 *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Pour tous $a, b \in I$:*

$$\boxed{\int_a^b u'(t)\, v(t)\, dt = [u(t)\, v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)\, v'(t)\, dt}$$

Preuve:

■

Exemple 5 $I = \displaystyle\int_1^2 t^3 \ln t\, dt$.

CAPACITÉ EXIGIBLE 2 : faire apparaître une dérivée → IPP
on ne connaît pas la fonction ln *mais beaucoup mieux sa dérivée...*

Les fonctions étant $\mathcal{C}^1$ sur , par IPP:

Exemple 6 $J = \displaystyle\int_0^1 x^2\, e^x\, dx$.

CAPACITÉ EXIGIBLE 3 : BAISSER un degré → DÉRIVER, l'AUGMENTER → PRIMITIVER
on veut diminuer le degré de x^2 de deux crans ⇒ deux IPP successives...
On retrouvera cette méthode dans les suites d'intégrales pour obtenir une relation de récurrence.

Les fonctions étant $\mathcal{C}^1$ sur , par IPP:
$J = \ldots$

On recommence: par IPP, $\displaystyle\int_0^1 x e^x\, dx = \ldots$

Conclusion: $J = e - 2$.

Exemple 7 : Illustration de la capacité exigible 3.

- **Polynômes exponentielles**
  But: calculer l'intégrale de fonctions du type $f(x) = P(x)\, e^{\alpha\, x}$, où P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et α un réel.
  Intégrations par parties successives: Diminuer le degré du polynôme (en le dérivant) jusqu'à ce qu'il ne reste plus que l'exponentielle à intégrer.

Puisque le degré du polynôme diminue d'un "cran" à chaque IPP, il faut faire ...... IPP successives.
exemple: $I = \int_0^1 (x^2+1)\, e^{-x}\, dx$.

- Calculer l'intégrale des fonctions du type: $f(x) = P(x)\, \sin(\alpha\, x)$ ou $f(x) = P(x)\, \cos(\alpha\, x)$
  Principe: Diminuer le degré du polynôme (en le dérivant) jusqu'à ce qu'il ne reste plus que le cosinus ou le sinus à intégrer.
  Puisque le degré du polynôme diminue d'un "cran" à chaque IPP, il faut faire $(\deg P)$ IPP successives.

- Calculer l'intégrale des fonctions du type: $f(x) = \sin(\alpha\, x)\, e^{\beta\, x}$ ou $f(x) = \cos(\alpha\, x)\, e^{\beta\, x}$
  Principe: On effectue deux IPP successives **de même sens** (soit on dérive deux fois l'exponentielle, soit on la primitive deux fois) pour aboutir à une équation, dont l'inconnue est l'intégrale cherchée.
  exemple: $I = \int_0^{\pi} \sin(2x)\, e^{-x}\, dx$.

3.3 Changement de variable

Théorème 3 *Soient f continue sur un intervalle I et $\alpha, \beta \in I$. Soit u de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ telle que $u([\alpha,\beta]) \subset I$. Alors:*

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(u(t))\, u'(t)\, dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\, dx}$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable $\mathcal{C}^1$ $\underline{x = u(t)}$

Remarque 7 : Mise en oeuvre du changement de variable $\mathcal{C}^1$ $x = u(t)$:
Trois choses à changer:
- ∗ **Les bornes:**
- ∗ **La variable:**
- ∗ **La différentielle:** "à la physicienne"

Exemple 8 $I = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\, dt$.
Changement de variable $\mathcal{C}^1$: $x = \sqrt{t}$. Alors:

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} e^x \times 2 \underbrace{dx}_{dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt} = 2[e^x]_1^{\sqrt{2}} = 2\left(e^{\sqrt{2}} - e\right).$$

Preuve: Soit F une primitive de f sur I, alors $F \circ u$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ et $(F \circ u)' = (f \circ u)\, u'$. Donc:
$$\int_\alpha^\beta f(u(t))\, u'(t)\, dt = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\, dx$$

■

Remarque 8 ATTENTION! Toujours bien vérifier que le changement de variable est licite...
exemple: $K = \displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2 x}\, dx$. Changement de variable $t = \tan x$:

Or $x \mapsto \dfrac{1}{1+\cos^2 x}$ est continue et strictement positive sur $[0, \pi]$ donc $K > 0$...!
Où est l'erreur?

Exemple 9 : Polynômes trigonométriques
But: calculer l'intégrale de fonctions du type $f(t) = \cos^n t \sin^p t$, où $n, p \in \mathbb{N}$.

POINT METHODE 1 :

1. Commencer par vérifier qu'il n'y a pas de primitive usuelle!

exemple: $f(t) = \cos t \sin^2 t$...

2. Si non, on étudie la parité de n et p:

$*$ **Premier cas: l'une au moins des deux puissances est impaire → changement de variable.**

$$\boxed{\text{Poser } x = \begin{cases} \sin t & \text{si } n \text{ est impair} \\ \cos t & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}}$$

exemple: $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 t \cos^3 t\, dt$.

$*$ **Deuxième cas: les deux puissances sont paires → linéariser le produit** $\cos^n t \sin^p t$**.**

exemple: $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \, \cos^2 t \, dt.$

Remarque 9 :
exemple: $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \, dt$. Que fait-on?

Et $L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t \, dt$. Que fait-on?

Conclusion: quand n et p ne sont pas trop grands, on peut aussi linéariser le produit!

Exemple 10 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \, dx.$

Proposition 5 *Soit $a > 0$ et f une fonction continue sur $[-a, a]$.*
(1) Si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 2 \int_0^a f$.
(2) Si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 0$.

Preuve:
$*$ Géométriquement:

$*$ Calculs:
(1) Par la relation de Chasles: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt.$

POINT METHODE 2 : changement de variable $\mathcal{C}^1$ $\boxed{x=-t}$
$\rightarrow$ *Méthode à retenir pour montrer qu'une fonction intégrale de ses bornes est paire / impaire*

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(x)\,dx \underset{\text{variable muette}}{=} \int_{0}^{a} f(t)\,dt.$$

Donc: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f.$
(2) Si f est impaire, le même changement de variable entraîne: $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt.$ Donc $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 0.$

■

Proposition 6 *Soit f une fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$. Alors:*
(1) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f = \int_{0}^{T} f.$
(2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_{a+nT}^{b+nT} f = \int_{a}^{b} f.$

Preuve:
$*$ Géométriquement:

$*$ Calculs:
(1) Par la relation de Chasles: $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f = \int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{T} f(t)\,dt + \int_{T}^{a+T} f(t)\,dt.$
Changement de variable $\mathcal{C}^1$: $t = x + T$ dans la dernière intégrale:
$\displaystyle\int_{T}^{a+T} f(t)\,dt = \dots$
Donc: $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f = \int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{T} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt = \int_{0}^{T} f(t)\,dt.$
(2) De même, changement de variable $\mathcal{C}^1$: $t = x + nT$, $\displaystyle\int_{a+nT}^{b+nT} f(t)\,dt = \dots$

■