Calcul intégral

I. Recherche de primitives

Exercice 1 Déterminer une primitive des expressions suivantes :

1. $\dfrac{3}{(t+2)^2}$
2. $\sin(4t)$
3. e^{2t+1}
4. $\dfrac{1}{1+9t^2}$
5. $t\sqrt{1+2t^2}$
6. $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$
7. $\dfrac{12t}{(1+3t^2)^3}$
8. $\dfrac{\ln^3 t}{t}$
9. $\dfrac{1}{t\sqrt{\ln t}}$
10. $\dfrac{1}{t^2\sqrt{t}}$
11. $\dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^t}$
12. $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^2}$
13. $\cos^2 t\,\sin t$
14. $\cos t\,\mathrm{e}^{\sin t}$
15. $\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$
16. $\dfrac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$
17. $\dfrac{\cos(\pi\,\ln t)}{t}$
18. $\dfrac{1}{\cos^2 t\sqrt{\tan t}}$
19. $\dfrac{1+\tan^2 t}{\tan^2 t}$
20. $\dfrac{\cos t}{(1-\sin t)^3}$
21. $\cos t\,\sin(3t)$
22. $\dfrac{\sin(2t)}{1+\sin^2 t}$

II. Calcul d'intégrales par primitives

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes:

1. $\displaystyle\int_{-2}^{0} x^2+x+1\,dx$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^5-5x^3\,dx$
3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos t\,dt$
4. $\displaystyle\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$
5. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\pi\,x+2}\,dx$
6. $\displaystyle\int_{0}^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx$
7. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-t\right)\,dt$
8. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\,\sin(x^2+1)\,dx$
9. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,(\cos x)^5\,dx$
10. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\,\mathrm{e}^{x^2-1}\,dx$
11. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2+1)^4}\,dx$
12. $\displaystyle I_1=\int_{0}^{4} \sqrt{x}\,(x-2\sqrt{x})\,dx$
13. $\displaystyle I_2=\int_{-4}^{4} \frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}}\,du$
14. $\displaystyle I_3=\int_{1}^{e} \frac{(\ln(3b))^5}{b}\,db$
15. $\displaystyle I_4=\int_{1}^{2} 3^u\,du$
16. $\displaystyle I_7=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \tan x\,dx$

III. Intégration par parties

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes:

1. $\displaystyle\int_{0}^{2} t\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,dt$
2. $(*)$ $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} t\,\tan^2 t\,dt$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(t^2+3t-4\right)\,\mathrm{e}^{2t}\,dt$
4. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,\mathrm{e}^t\,dt$
5. $\displaystyle I_1=\int_{0}^{1} \arctan t\,dt$
6. $\displaystyle I_2=\int_{1}^{2} (\ln x)^2\,dx$
7. $\displaystyle I_3=\int_{1}^{2} u^\alpha\,\ln u\,du$
8. $(*)$ $\displaystyle J_1=\int_{0}^{1} v^3 e^{-v^2}\,dv$
9. $\displaystyle J_2=\int_{0}^{\pi} e^{3u}\,\cos(2u)\,du$
10. $(*)$ $\displaystyle K_1=\int_{0}^{1} \ln(1+t^2)\,dt$
11. $\displaystyle K_2=\int_{1}^{e} \sin(\ln t)\,dt$

Exercice 4 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on note $\displaystyle I_n=\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$ et $\displaystyle J_n=\int_0^1 t^n\,\ln(1+t^2)\,dt$. Montrer que $\displaystyle J_n=\frac{\ln 2}{n+1}-\frac{2}{n+1}\,I_{n+2}$.

Exercice 5 Pour tout entier n on note:

$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 x e^{-x^2}(1-x)^n dx.$$

Établir pour tout n de $\mathbb{N}$ une relation entre I_n et J_{n+1}.

Exercice 6 On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \, dx\,.$$

Montrer que: $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

Exercice 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose:

$$u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}\,.$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2.
2. Établir: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} \, dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx\,.$$

IV. Changement de variable

Exercice 8 Calculer les intégrales suivantes (en utilisant le changement de variable indiqué):

1. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}} \, dt \ (u = \sqrt{t})$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \, \cos t \, dt \ (u = \sin t)$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \, \cos^3 t \, dt \ (u = \sin t)$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-t}} \, dt \ (u = \mathrm{e}^t)$
5. $\displaystyle I = \int_4^9 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \ (u = \sqrt{x})$
6. $\displaystyle J = \int_0^1 \frac{dt}{e^t+1} \ (u = e^t)$
7. $\displaystyle K = \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}+2t} \ (x = \sqrt{t})$
8. $\displaystyle J = \int_1^e \frac{dt}{t+t(\ln t)^2} \ (u = \ln t)$
9. $\displaystyle K = \int_1^2 \frac{\ln(1+x)-\ln x}{x^2} \, dx \ (t = \frac{1}{x})$
10. $(*)$ $\displaystyle J = \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t} \, dt \ (u = \pi - t)$
11. $\displaystyle K = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos t\,(\cos t - 1)} \, dt \ (u = \cos t)$

Exercice 9 Calculer les intégrales suivantes (en utilisant le changement de variable indiqué):

1. $\displaystyle\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{t}} \, dt \ (u = \sqrt{t})$
2. $\displaystyle\int_3^4 \frac{\ln\left(\sqrt{t}-1\right)}{\sqrt{t}} \, dt \ (u = \sqrt{t})$

Exercice 10 On considère pour tout réel x : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{t^4+t^2+1} \, dt$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(-x) = F(x)$.

Exercice 11 On pose pour tout réel x : $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^2}}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

Exercice 12 :

1. Montrer que:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} \, dt = \frac{\pi}{4}\,.$$

2. En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}$

   On pourra faire le changement de variable: $t = \sin x$