Équations différentielles linéaires

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

1.1 Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Définition 1 **:**
(1) On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants** *une équation du type:*

$$(E) \qquad ay'(x) + by(x) = f(x) \ \forall x \in I, \text{ où}$$

• $a, b \in \mathbb{R}$,
• *f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et est appelée* **second membre** *de (E).*
• *$y : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I et est appelée* **inconnue** *de (E).*
(2) On dit que y est **solution de** *(E) ssi y satisfait (E), i. e. y est dérivable sur I et*
$\forall x \in I$, $ay'(x) + by(x) = f(x)$.
Résoudre (E) c'est trouver TOUTES les solutions de (E) sur I.
(3) On appelle **équation homogène associée à** *(E) l'équation (E) sans second membre:*

$$(H) \qquad ay'(x) + by(x) = 0 \, \forall x \in I\,.$$

Remarque 1 : Explications du vocabulaire.
(1) *Premier ordre:* cette équation ne fait intervenir que la dérivée première de la fonction inconnue.
(2) *Linéaire:* si y_1 et y_2 sont deux solutions de (H) alors toute combinaison linéaire de y_1, y_2 est une solution de (H), i.e. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de (H).
(3) *coefficients constants:* car a et b sont des réels ou des fonctions constantes sur I.

Remarque 2 Pour éviter des notations trop lourdes, on peut ne pas écrire la variable x dans (E), soit:

$$(E) \qquad ay' + by = f\,.$$

Exemple 1 :
(1) $y' + 2y = -1$
(2) $y' - 3y = 2$
(3) $y' + y = x$
(4) $y' + y = -2e^{-x}$

Remarque 3 Dans cette partie, on suppose $\boxed{a \neq 0}$
En effet, si $a = 0$, $(E) \iff by = f$, et la résolution est aisée.

POINT METHODE 1 : résolution de (E) en trois étapes.

1. On calcule TOUTES les solutions de l'équation homogène associée (H).
2. On exhibe UNE solution particulière de (E).
3. Synthèse: TOUTES les solutions de (E) sont de la forme: solution de (H)+ solution particulière.

1.1.1 Résolution de l'équation homogène associée

On rappelle que l'équation homogène associée à (E) est:

$$(H) \qquad ay' + by = 0\,.$$

Proposition 1 *On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de (H), donc:*

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{x \mapsto Ke^{-\frac{b}{a}x}, K \in \mathbb{R}\right\}}$$

Preuve: (par double inclusion)
$\boxed{\supset}$ Pour tout réel K, on note $g_K(x) = Ke^{-\frac{b}{a}x}$, $\forall x \in I$. Montrons que $g_K \in \mathcal{S}_H$, i.e g_K est solution de (H).

Donc g_K satisfait (H). Conclusion: $\left\{x \mapsto Ke^{-\frac{b}{a}x}, K \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathcal{S}_H$.
$\boxed{\subset}$ Réciproquement, soit y une solution de (H).
Posons $g(x) = y(x)e^{\frac{b}{a}x}$, $\forall x \in I$. Montrons que g est constante sur I:

Donc g est constante sur I: il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $g(x) = K$ et $y(x) = K\,e^{-\frac{b}{a}x}$.
Conclusion: $\mathcal{S}_H \subset \left\{x \mapsto Ke^{-\frac{b}{a}x}, K \in \mathbb{R}\right\}$

■

Exemple 2 :
(1) $y' + 2y = -1$
(2) $y' - 3y = 2$

1.1.2 Solution particulière de (E)

On cherche une fonction y solution de (E).

Si f est constante: on regarde si (E) a une solution *"évidente"*, i.e. constante.
En effet, si y est constante sur I alors $y' = 0$ donc si y est solution de (E), $by = f$ et on peut récupérer une solution particulière.
exemple: $y' + 2y = -1$.

Si f n'est pas constante?
Cette technique ne permet pas toujours d'obtenir une solution particulière, notamment quand les coefficients a et b ou le second membre f ne sont pas constants sur I. Dans ce cas, on utilise la méthode de la variation de la constante.

Exemple 3 $y' + y = x$.

Il faut aussi penser à bien lire le sujet en entier car, parfois, une solution particulière est donnée dans l'énoncé!

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 : méthode de la variation de la constante.
Cette méthode permet TOUJOURS de déterminer une solution particulière quelle que soit l'équation différentielle du premier ordre considérée.

Exemple 4 $y' + y = x$.

1. **On fait varier la constante dans les solutions de (H):**
(il faut donc savoir résoudre (H)!!)
On rappelle que les solutions de $(H) : ay' + by = 0$ sont de la forme: $y(x) = Ce^{-\frac{b}{a}x}$, $\forall x \in I$.
On cherche alors une solution particulière de (E) sous la forme:

$$y_0(x) = C(x)e^{-\frac{b}{a}x}, \text{ où } C \text{ est une fonction dérivable sur } I.$$

Le but est donc de déterminer cette fonction C.

Reprise de l'exemple 3:
Les solutions de (H) sont de la forme: $y(x) =$ $\qquad\qquad\qquad$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Sous quelle forme cherche-t-on une solution particulière?

2. **Utiliser que y_0 est une SOLUTION de (E):**
Ce calcul est savoir refaire (et non à apprendre par coeur!): y_0 est solution de (E) ssi

$$ay_0' + by_0 = f \iff a\left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) + bC(x)e^{-\frac{b}{a}x} = f(x)$$
$$\iff (aC'(x) + bC(x) - bC(x))\, e^{-\frac{b}{a}x} = f(x) \iff aC'(x) = f(x)\, e^{\frac{b}{a}x} \iff C'(x) = \frac{f(x)}{a}\, e^{\frac{b}{a}x}.$$

Moyen d'auto-correction: les termes en $C(x)$ doivent s'annuler!! Si ce n'est pas le cas, c'est que vos calculs sont faux...
Reprise de l'exemple 3: exprimer $C'(x)$.

3. **Déterminer une primitive de C:**
Puisqu'on connaît sa dérivée C' par le calcul précédent, il reste à effectuer un calcul de primitive pour déterminer C.

Remarque 4 Une seule primitive suffit (donc pas de constante!) puisqu'on ne cherche qu'UNE SEULE solution particulière.

Reprise de l'exemple 3:

Remarque 5 : principe de superposition.
Si (E) est de la forme: $ay' + by = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, où pour tout $i = 1, \ldots, n$, les fonctions f_i sont continues sur I, alors:
si y_1 est une solution particulière de $ay' + by = f_1(x)$,
si y_2 est une solution particulière de $ay' + by = f_2(x)$,
$\vdots$
si y_n est une solution particulière de $ay' + by = f_n(x)$,
alors $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ est une solution particulière de $(E) : ay' + by = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$.
Preuve: (c'est le mot "linéaire" qui revient)
On prend $n = 2$ pour bien comprendre l'idée. Donc $(E) : ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$, et soient y_1 (resp. y_2) une solution particulière de $ay' + by = f_1(x)$ (resp. $ay' + by = f_2(x)$). Alors:
$y_1 + y_2$ est $\qquad\qquad\qquad$ sur I et

$$\begin{aligned} a(y_1 + y_2)' + b(y_1 + y_2) &= \\ &= \underbrace{\left(\qquad\qquad\qquad \right)}_{\text{regrouper } y_1} + \underbrace{\left(\qquad\qquad\qquad \right)}_{\text{regrouper } y_2} \\ &= f_1 + f_2 . \end{aligned}$$

Donc $y_1 + y_2$ est solution de (E).

$\blacksquare$

Exemple 5 $y' + y = x - 2e^{-x}$.

1.1.3 Synthèse: solutions de (E)

Proposition 2 *Toute solution y de $(E) : ay' + by = f$ sur I est la somme d'une solution particulière de (E) et d'une solution de l'équation homogène associée $(H) : ay' + by = 0$.*
En d'autres termes, notant $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E) et y_0 une solution particulière de (E):

$$\mathcal{S}_E = \{y_0 + y_H / y_H \text{ solution de } (H)\} = \left\{x \mapsto y_0(x) + Ce^{-\frac{b}{a}x}, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Preuve:
$\boxed{\supset}$ Soient y_0 une solution particulière de (E) et $y_H = Ke^{-\frac{b}{a}x}$ une solution de (H). $(K \in \mathbb{R})$
Montrons que $y_0 + y_H \in \mathcal{S}_E$, i.e $y_0 + y_H$ est solution de (E).

Donc $(y_0 + y_H) \in \mathcal{S}_E$ et $\left\{x \mapsto y_0(x) + Ke^{-\frac{b}{a}x}, K \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathcal{S}_E$.
$\boxed{\subset}$ Réciproquement, soit y solution de (E).
Soit y_0 une solution particulière de (E). Peut-on toujours en déterminer une?

On pose alors: $y_H = y - y_0$. Montrons que y_H est solution de (H).

Donc y_H est solution de (H), donc $y(x) = y_0(x) + y_H(x) = y_0(x) + Ke^{-\frac{b}{a}x}$. Donc $\mathcal{S}_E \subset \left\{x \mapsto y_0(x) + Ke^{-\frac{b}{a}x}, K \in \mathbb{R}\right\}$.

$\blacksquare$

Exemple 6 Terminer la résolution des équations différentielles: $y' + 2y = -1$ et $y' + y = x$ et $y' + y = x - 2e^{-x}$.

1.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients non constants

Dans cette partie, on s'intéresse à résoudre des équations différentielles du type:

$$(E) \qquad y'(x) + b(x)y(x) = f(x)\ \forall x \in I, \text{ où}$$

- b, f sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- $y : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I.

Exemple 7 $y' + xy = x$

1.2.1 Résolution de l'équation homogène

Equation homogène associée à (E):

$$(H) \qquad y'(x) + b(x)y(x) = 0\,.$$

Proposition 3 *On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de (H), donc:*

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{x \mapsto Ce^{-B(x)}, C \in \mathbb{R}\right\}} \text{ où } B \text{ est une primitive de } b \text{ sur } I.$$

Preuve:
$*$ Justifier l'existence de B:

$\boxed{\supset}$ Notons $y(x) = Ce^{-B(x)}$, pour tout $x \in I$. B est dérivable sur I (car) donc y est dérivable sur I et $y'(x) = \dots$
Donc $y'(x) + b(x)\,y(x) = \dots$
et y est bien solution de (H).
$\boxed{\subset}$ Soit y une solution de (H). Posons $z(x) = y(x)\,e^{B(x)}$ pour tout $x \in I$. z est dérivable sur I, et:
$z'(x) = \dots$
Donc z est constante sur I: il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $z(x) = C$, donc $y(x) = \dots$

■

Reprise de l'exemple 6:

1.2.2 Recherche d'une solution particulière de (E)

Reprise de l'exemple 6: solution particulière constante?

Exemple 8 $y' - xy = 2xe^{x^2/2}$. Solution particulière constante?

CAPACITÉ EXIGIBLE 2 : Méthode de la variation de la constante.

1. On fait varier la constante dans les solutions de (H):
   $(H) \quad y' - xy = 0$. Résoudre (H):

   On cherche donc une solution particulière sous la forme:

2. Utiliser que y_0 (solution particulière) est une SOLUTION de (E):
   y_0 est solution de E ssi pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $y_0' - xy_0 = 2xe^{x^2/2} \iff \dots$

   Donc $C'(x) = \dots$

3. Déterminer une primitive de C':

1.2.3 Synthèse

Proposition 4 *Toute solution y de $(E) : y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$ sur I est la somme d'une solution particulière de (E) et d'une solution de l'équation homogène associée $(H) : y' + b(x)y = 0$.*
En d'autres termes, notant $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E) et y_0 une solution particulière de (E):

$$\mathcal{S}_E = \{y_0 + y_H / y_H \text{ solution de } (H)\} = \left\{x \mapsto y_0(x) + Ce^{-B(x)}, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Preuve:
$*$ Soit y_0 une solution particulière de (E) et y_H une solution de (H). Posons $y = y_0 + y_H$. Alors y est dérivable sur I et:
$y'(x) + b(x)y(x) = \ldots$
Donc y est solution de E.
$*$ Réciproquement, soit y une solution de (E). Posons $y_H = y - y_0$, où y_0 est une solution particulière de (E).
Alors $y'_H(x) + b(x)\, y_H(x) = \ldots$
Donc y_H est solution de (H) et donc y s'écrit comme la somme d'une solution de (H) et d'une solution particulière de (E).

■

Remarque 6 Le principe de superposition est encore valable.

Exercice 1 :
(1) $y' - xy = 2x + 2xe^{x^2/2}$.
(2) $y' + (\tan x)y = \cos x + \sin(2x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

2 Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants

2.1 Définition

Définition 2 :
(1) On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** *une équation du type:*

$$(E) \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)\ \forall x \in I,\ \text{où}$$

- $a, b, c \in \mathbb{R}$, *avec* $a \neq 0$.
- f *est une fonction continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$, *et est appelée* **second membre** *de* (E).
- $y : I \to \mathbb{R}$ *est une fonction deux-fois dérivable sur* I *et est appelée* **inconnue** *de* (E).

(2) On dit que y *est* **solution de** (E) *ssi* y *satisfait* (E), *i. e.* y *est deux-fois dérivable sur* I *et* $\forall x \in I$, $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$.
Résoudre (E) *c'est trouver TOUTES les solutions de* (E) *sur* I.
(3) On appelle **équation homogène associée à** (E) *l'équation* (E) *sans second membre:*

$$(H) \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0\,\forall x \in I\,.$$

Remarque 7 Pour éviter des notations trop lourdes, on peut ne pas écrire la variable x dans (E), soit:

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = f\,.$$

Exemple 9 :
(1) $y'' - y' - 2y = e^{2x}$
(2) $y'' + 2y' + y = 4x$
(3) $y'' + y = \cos x$

2.2 Résolution de (E)

La méthode de résolution de (E) reste la même que pour le premier ordre mais les calculs changent:

POINT METHODE 2 : résolution de (E) en trois étapes.

1. On calcule TOUTES les solutions de l'équation homogène associée (H).
2. On exhibe UNE solution particulière de (E).
   La méthode de la variation de la constante n'est pas au programme pour le second ordre. On se limitera donc aux cas où: f est constante; $f(x) = P(x)e^{mx}$, avec P un polynôme et $m \in \mathbb{R}$; $f(x) = \sin(\omega\, x)$; $f(x) = \cos(\omega\, x)$.
3. Synthèse: TOUTES les solutions de (E) sont de la forme: solution de (H)+ solution particulière.

2.2.1 Résolution de (H) (premier semestre)

On rappelle que l'équation homogène associée à (E) est:

$$(H) \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0\,\forall x \in I\,.$$

Définition 3 *On appelle* **équation caractéristique** *associée à* (H) *l'équation:*

$$ar^2 + br + c = 0\,.$$

Proposition 5 *On note* $\mathcal{S}_H$ *l'ensemble des solutions de* (H) *et* $\Delta = b^2 - 4ac$ *le discriminant de l'équation caractéristique.*
(1) **si $\Delta > 0$:** *on note* r_1 *et* r_2 *les deux racines réelles de l'équation caractéristique. Alors:*

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

(2) **si $\Delta = 0$:** *on note* r *la racine double de l'équation caractéristique. Alors:*

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{rx}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

(3) **si $\Delta < 0$:** *on note* z_1 *et* z_2 *les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.*
On note $z_1 = \alpha + i\omega$ *et* $z_2 = \overline{z_1} = \alpha - i\omega$, *alors:*

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{x \mapsto (\lambda_1 \cos(\omega x) + \lambda_2 \sin(\omega x))e^{\alpha x}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

Remarque 8 Ces résultats doivent vous rappeler quelquechose...

Exemple 10 :
(1) (H) $\quad y'' - y' - 2y = 0.$
Équation caractéristique: $r^2 - r - 2 = 0$ (avec $\Delta = 9 > 0$). Donc deux racines réelles: $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$, donc les solutions de (H) sont de la forme:
$y_H(x) =$
(2) (H) $\quad y'' + 2y' + y = 0.$
Équation caractéristique: $r^2 + 2r + 1 = 0 \iff (\ldots\ldots)^2 = 0$. Donc une racine double: $r = \ldots\ldots$, donc les solutions de (H) sont de la forme:
$y_H(x) =$
(3) (H) $\quad y'' + y = 0.$
Équation caractéristique: $r^2 + 1 = 0$ (avec $\Delta = -4 < 0$). Donc deux racines complexes conjuguées: $r_1 = i$ et $r_2 = -i$, donc les solutions de (H) sont de la forme:
$y_H(x) =$

2.2.2 Solution particulière de (E)

• Si f est constante
On regarde si (E) a une solution *"évidente"*, i.e. constante.
En effet, si y est constante sur I alors $y'' = 0$ et $y' = 0$ donc si y est solution de (E), $cy = f$ et on peut récupérer une solution particulière.

Exemple 11 $y'' - y' - 2y = 1$; $y'' + 2y' + y = 0$; $y'' + y = \sqrt{2}$

• Si $f(x) = P(x)\, e^{mx}$, où P est un polynôme et m un réel.
On cherche une solution particulière sous la forme:

$$y_0(x) = R(x)e^{mx} \,,$$

où R est un polynôme à déterminer et vérifiant:
(1) si m n'est pas racine de l'équation caractéristique alors $\deg R = \deg P$.
(2) si m est racine simple de l'équation caractéristique alors $\deg R = \deg P + 1$.
(3) si m est racine double de l'équation caractéristique alors $\deg R = \deg P + 2$.

POINT METHODE 3 : détermination de R.
On utilise que y_0 est solution de (E) et l'identification des coefficients des polynômes.

Exemple 12 :
(1) (E) $\quad y'' - y' - 2y = e^{2x}$.
Equation caractéristique: $r^2 - r - 2 = 0$, donc 2 est racine simple de l'équation caractéristique, donc on cherche une solution particulière sous la forme:

$$y_0(x) = (a + bx)\, e^{2x} \,.$$

Justifier:

y_0 est solution de (E) ssi $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$y_0'' - y_0' - 2y_0 = e^{2x} \iff \ldots$$

Donc il suffit de choisir $b = \dfrac{1}{3}$ et $a = 0$ pour avoir une solution particulière: $\boxed{y_0(x) = \dfrac{1}{3}\, xe^{2x}}$

(2) (E) $\quad y'' + 2y' + y = 4x = 4xe^{0x}$.
Equation caractéristique: $r^2 + 2r + 1 = 0$, donc 0 est n'est pas racine de l'équation caractéristique, donc on cherche une solution particulière sous la forme:

$$y_0(x) = a + bx\,.$$

Justifier:

y_0 est solution de (E) ssi $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y_0'' + 2y_0' + y_0 = 4x &\iff \\ &\iff \begin{cases} \ldots \\ \ldots \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = \\ b = \end{cases} \end{aligned}$$

Donc il suffit de choisir pour avoir une solution particulière: ...

• **Si** $f(x) = \sin(\omega\, x)$ **ou** $f(x) = \cos(\omega\, x)$
On cherche une solution particulière sous la forme:

$$y_0(x) = \lambda \sin(\omega\, x) + \mu \cos(\omega\, x) \text{ ou } y_0(x) = \lambda x \sin(\omega\, x) + \mu x \cos(\omega\, x)\,.$$

Exemple 13 :
(1) $y'' + y = \cos x$.
On cherchera une solution particulière sous la forme: $y_0(x) = \alpha\, x \sin(x)$.
y_0 est solution de l'équation ssi: $\forall x \in \mathbb{R}$,

Donc on prend $\alpha = \ldots$ et une solution particulière est $\boxed{y_0 = \frac{1}{2} x \sin x}$

(2) $y'' + y = \sin(2x)$
On cherchera une solution particulière sous la forme: $y_0(x) = \alpha\, \sin(2x)$.
y_0 est solution de l'équation ssi: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y_0'' + y_0 = \sin(2x) &\iff \\ &\iff \end{aligned}$$

Donc on prend $\alpha = \ldots$ et une solution particulière est $\boxed{y_0 = -\frac{1}{3} \sin(2x)}$

2.2.3 Synthèse: solutions de (E)

Proposition 6 **(admise):**
Toute solution y de $(E) : ay'' + by' + cy = f$ sur I est la somme d'une solution particulière de (E) et d'une solution de l'équation homogène associée $(H) : ay'' + by' + cy = 0$.
En d'autres termes, notant $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E) et y_0 une solution particulière de (E):

$$\mathcal{S}_E = \{y_0 + y_H / y_H \textit{ solution de } (H)\}\,.$$

Exemple 14 : synthèse des résultats précédents.
(1) $y'' - y' - 2y = e^{2x}$.

(2) $y'' + 2y + y = 4x$.

Exemple 15 $y'' + y = \cos x + \sin(2x)$