

## Équations différentielles linéaires

### I. Entraînement

**Exercice 1** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes:

- |                     |  |  |
|---------------------|--|--|
| 1. $3y' + 4y = 1$   | 4. $2y' + y = x^2 + 1$                                 | 6. $y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x}{1+x^2}$ |
| 2. $y'' - 3y = 5$   |  |  |
| 3. $y'' + 3y = 0$ . | 5. $y' - \frac{4x}{4x^2+1}y = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$ |  |

**Exercice 2** On considère les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définies par:

$$f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x) \text{ et } g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

1. Déterminer le signe de  $g(x)$ .
2. En déduire les variations de  $f$ , et calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
3. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle:  $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ .

**Exercice 3** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes:

- |   |  |
|---|--|
| 1. $y'' + 6y' + 9y = 1$   | 5. $y'' - 4y' + y = \cos(3x)$ (solution particulière sous la forme $y_0(x) = A \cos(3x) + B \sin(3x)$ )      |
| 2. $y'' - 3y' + 2y = \sqrt{2}$  |  |
| 3. $y'' - 2y' + 5y = 10$ .  |  |
| 4. $y'' - y' + \frac{1}{4}y = \omega$ , où $\omega$ est une constante réelle. | 6. $y'' - 6y' + 9y = e^{2x} + e^{3x}$ (solution particulière sous la forme $y_0(x) = Ax^2e^{3x} + Be^{2x}$ ) |

### II. Changement de fonction

**Exercice 4** On cherche à résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle :

$$(E) \quad x^2y'' - 3xy' + 4y = 0.$$

*c'est-à-dire à trouver toutes les fonctions deux-fois dérivables sur  $]0, +\infty[$  vérifiant (E).*

1. Cette équation est-elle linéaire? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?
2. *Analyse:* Soit  $y$  une solution de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $z(t) = y(e^t)$ .
  - (a) Calculer pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $z'(t)$  et  $z''(t)$ .
  - (b) En déduire que  $z$  vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants que l'on précisera.
  - (c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
  - (d) En déduire  $y$ .
3. *Synthèse:* Réciproquement, vérifier que les fonctions trouvées à la fin de l'analyse sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

**Exercice 5** Le but de cet exercice est de résoudre sur  $]0, +\infty[$ , l'équation différentielle:

$$(E) \quad x^2y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0.$$

*c'est-à-dire de trouver toutes les fonctions deux-fois dérivables sur  $]0, +\infty[$  vérifiant (E).*

1. Soit  $y$  une solution de (E). (sous réserve d'existence).
  - (a) On pose:  $\forall x > 0, z(x) = x^2y(x)$ .  
Montrer que  $z$  est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, notée (E').

- (b) Résoudre  $(E')$ .
  - (c) En déduire  $y$ .
2. Terminer la résolution de  $(E)$ .

**Exercice 6** On veut résoudre sur  $]0, +\infty[$  l'équation  $(E)$ :  $4t y'' + 2y' - y = 0$ .

1.  $\forall t \in \mathbb{R}$ , on pose:  $z(t) = y(t^2)$ , où  $y$  est solution de  $(E)$ .  
Montrer que  $z$  est solution d'une équa diff linéaire du second ordre à coefficients constants, que l'on notera  $(E')$ .
2. Résoudre  $(E')$ .
3. En déduire les solutions de  $(E)$  sur  $]0, +\infty[$ .

### III. Équations fonctionnelles

**Exercice 7** Le but de cet exercice est de trouver les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que :

$$(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2 - x).$$

1. Soit  $f$  une solution de  $(E)$  (sous réserve d'existence).
  - (a) Montrer que  $f$  est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux, notée  $(E')$ .
  - (b) Résoudre  $(E')$ .
  - (c) En déduire  $f$ .
2. Terminer la résolution de  $(E)$ .

**Exercice 8** Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$(E) \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f(-x) = 1 \\ f(0) = -4 \end{cases}$$

1. Soit  $f$  une solution de  $(E)$  (sous réserve d'existence). On pose:  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)f(-x)$ .
  - (a) Montrer que  $g$  est constante et que  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 16$ .
  - (b) En déduire que  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  et que  $f$  est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre un, notée  $(E')$ .
  - (c) Résoudre  $(E')$ .
  - (d) En déduire  $f$ .
2. Terminer la résolution de  $(E)$ .