Équations différentielles linéaires

I. Entraînement

Exercice 1 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes:

1. $3y' + 4y = 1$
2. $y'' - 3y = 5$
3. $y'' + 3y = 0$.
4. $2y' + y = x^2 + 1$
5. $y' - \dfrac{4x}{4x^2+1}y = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$
6. $y' + \dfrac{x}{1+x^2}y = \dfrac{x}{1+x^2}$

Exercice 2 On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par:

$$f(x) = e^{-x}\ \ln(1+e^x) \text{ et } g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)\,.$$

1. Déterminer le signe de $g(x)$.
2. En déduire les variations de f, et calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle: $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$.

Exercice 3 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes:

1. $y'' + 6y' + 9y = 1$
2. $y'' - 3y' + 2y = \sqrt{2}$
3. $y'' - 2y' + 5y = 10$.
4. $y'' - y' + \dfrac{1}{4}y = \omega$, où ω est une constante réelle.
5. $y'' - 4y' + y = \cos(3x)$ (solution particulière sous la forme $y_0(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$)
6. $y'' - 6y' + 9y = e^{2x} + e^{3x}$ (solution particulière sous la forme $y_0(x) = Ax^2e^{3x} + Be^{2x}$)

Exercice 4 Déterminer une équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions :

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

II. Changement de fonction

Exercice 5 On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$(E) \quad x^2y'' - 3xy' + 4y = 0\,.$$

c'est-à-dire à trouver toutes les fonctions deux-fois dérivables sur $]0, +\infty[$ *vérifiant* (E).

1. Cette équation est-elle linéaire? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?
2. *Analyse:* Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.
   (a) Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.
   (b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants que l'on précisera.
   (c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
   (d) En déduire y.
3. *Synthèse:* Réciproquement, vérifier que les fonctions trouvées à la fin de l'analyse sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

Exercice 6 Le but de cet exercice est de résoudre sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle:

$$(E) \qquad x^2y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0\,.$$

c'est-à-dire de trouver toutes les fonctions deux-fois dérivables sur $]0, +\infty[$ *vérifiant* (E).

1. Soit y une solution de (E). (sous réserve d'existence).

   (a) On pose: $\forall x > 0,\ z(x) = x^2 y(x)$.
   Montrer que z est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, notée (E').
   (b) Résoudre (E').
   (c) En déduire y.

2. Terminer la résolution de (E).

Exercice 7 On veut résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation (E): $4t\,y'' + 2y' - y = 0$.

1. $\forall t \in \mathbb{R}$, on pose: $z(t) = y(t^2)$, où y est solution de (E).
   Montrer que z est solution d'une équa diff linéaire du second ordre à coefficients constants, que l'on notera (E').
2. Résoudre (E').
3. En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8 Trouver les fonctions y, dérivables sur $]0, +\infty[$, ne s'annulant pas sur $]0, +\infty[$, vérifiant:

$$(E) \qquad x^2y^2 - xy' + y = 0\,.$$

(on pourra poser: $z = \dfrac{1}{y}$ où y est une solution de (E))

III. Équations fonctionnelles

Exercice 9 Le but de cet exercice est de trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,\ f'(x) = f(2-x)\,.$$

1. Soit f une solution de (E) (sous réserve d'existence).
   (a) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux, notée (E').
   (b) Résoudre (E').
   (c) En déduire f.
2. Terminer la résolution de (E).

Exercice 10 Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(E) \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}\,,\ f'(x)f(-x) = 1 \\ f(0) = -4 \end{cases}$$

1. Soit f une solution de (E) (sous réserve d'existence). On pose: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)\,f(-x)$.
   (a) Montrer que g est constante et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 16$.
   (b) En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre un, notée (E').
   (c) Résoudre (E').
   (d) En déduire f.
2. Terminer la résolution de (E).