

Vocabulaire des ensembles

BCPST 1C – Mme MOREL

Introduction.

Dans tout ce chapitre, E désigne un ensemble.

Rappel:

\mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels: $0, 1, 2, 3, \dots$

\mathbb{Z} désigne l'ensemble des entiers relatifs: entiers naturels et leurs opposés.

\mathbb{Q} désigne l'ensemble des rationnels: de la forme $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

\mathbb{R} désigne l'ensemble des réels.

\mathbb{C} désigne l'ensemble des complexes.

1 Appartenance et inclusion

1.1 Appartenance

Notation 1 Si x est un élément de E , on note $x \in E$, qui se dit x **appartient à** E .

Si x n'appartient pas à E , on note $x \notin E$.

Exemple 1 :

- $E = \{1, 2, 3\}$, alors $1 \in E$, $2 \in E$, $3 \in E$, mais $6 \notin E$.
- $7 \in [7, +\infty[$ mais $7 \notin]7, +\infty[$.

Remarque 1 :

Il y a un ensemble qui ne contient aucun élément, c'est l'**ensemble vide**, noté \emptyset .

Tout ensemble contenant un seul élément est un **singleton**.

1.2 Inclusion

Définition 1 Soient A et E deux ensembles.

On dit que A est **inclus dans** E , ou A est un **sous-ensemble** de E , ou encore A est une **partie** de E , et on note $A \subset E$ si tout élément de A appartient à E :

$$\forall x \in A, x \in E.$$

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

Exemple 2 :

- $\{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.
- $[7, +\infty[\subset \mathbb{R}$ et plus généralement, tous les intervalles de \mathbb{R} sont des parties de \mathbb{R} : par exemple, si $a, b \in \mathbb{R}$,

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\} \quad]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > a\} \text{ etc...}$$

Notations particulières:

- Intervalles de \mathbb{R} : $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$ $\mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[$.
- Notation zA : si A est une partie de \mathbb{C} et $z \in \mathbb{C}$, on pose: $zA = \{z a / a \in A\}$.
Exemple: $\pi\mathbb{Z} = \{\pi z / z \in \mathbb{Z}\}$.

- Sous-ensembles de \mathbb{N} : si $n, m \in \mathbb{N}$

$$[n, m] = \{k \in \mathbb{N} \mid n \leq k \leq m\} = \{n, n+1, \dots, m\}.$$

Exemple 3 description des intervalles de \mathbb{R} :

Définition 2 On appelle **intervalle** toute partie de \mathbb{R} de la forme:

$$\begin{array}{ll}
 (1) [a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\} & (2) [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\} \\
]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\} &]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > a\} \\
 [a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\} &]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\} \\
]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\} &]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} / x < b\} \\
 &]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}!
 \end{array}$$

Remarque 2 Intuitivement, un intervalle est une partie de \mathbb{R} *continue*, au sens où on peut la tracer *sans lever le stylo*.

Exemple 4 :

- (1) $[a, a] = \{a\}$: singleton.
- (2) $]a, a[= \emptyset$ donc l'ensemble vide est un intervalle!
- (3) Les intervalles de la forme $[a, b]$ sont appelés **segments**.

Remarque 3 A retenir: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0,$

$$|x - a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \iff x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

Exemple 5 : Images directe et réciproque.

(1) **Image directe**

Définition 3 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Pour toute partie A de \mathcal{D}_f , on appelle **image directe de A par f** l'ensemble des images des éléments de A , noté $f(A)$:

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in A, f(x) = y\}.$$

Remarque 4 En d'autres termes: $y \in f(A) \iff \exists x \in A, f(x) = y$

POINT METHODE 1 : Détermination de $f(A)$ graphiquement :

1. On trace A sur l'axe des abscisses.
2. On sélectionne la ou les portion(s) de la courbe dont les abscisses sont dans A . (droites verticales).
3. On "projette" sur l'axe des ordonnées la ou les portion(s) de la courbe: c'est $f(A)$!

Exercice 1 :

- (1) Fonction carrée: déterminer $f([1, 2])$, $f([-1, 1])$, $f([-1, 0])$, $f(\mathbb{R})$.
- (2) $\exp(\mathbb{R})$.
- (3) $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$, $\sin(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ et $\cos([0, \pi])$.
- (4) $\ln(]1, +\infty[)$.

Proposition 1 Soient une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et A, B deux parties de \mathcal{D}_f telles que $A \subset B$. Alors $f(A) \subset f(B)$.

Preuve:

■

(2) Image réciproque

Définition 4 Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Pour toute partie B de \mathbb{R} , on appelle **image réciproque de B par f** l'ensemble des antécédants des éléments de B , noté $\check{f}(B)$:

$$\check{f}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}.$$

Remarque 5 : En d'autres termes: $x \in \check{f}(B) \iff f(x) \in B$

POINT METHODE 2 : Détermination de $\check{f}(B)$ graphiquement :

1. On trace B sur l'axe des ordonnées.
2. On sélectionne la ou les portion(s) de la courbe dont les ordonnées sont dans B . (droites horizontales).
3. On "projette" sur l'axe des abscisses la ou les portion(s) de la courbe: c'est $\check{f}(B)$!

Exercice 2 :

- (1) Fonction carrée: déterminer $\check{f}([-2, -1])$, $\check{f}([-2, 2])$, $\check{f}([0, 2])$, $\check{f}(\mathbb{R}_-)$ et $\check{f}(\mathbb{R}_+)$.
- (2) $\exp(]-\infty, 0])$.
- (3) $\sin(\{0\})$ et $\cos(\{1\})$.

Proposition 2 Soient une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et A, B deux parties de \mathbb{R} telles que $A \subset B$. Alors $\check{f}(A) \subset \check{f}(B)$.

Preuve:

■

Remarque 6 :

- (1) Soit un ensemble E : $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$.

En d'autres termes: l'ensemble vide et E sont toujours deux parties de E .

- (2) si $A \subset B$ et $B \subset E$ alors $A \subset E$.

- (3) $A = B \iff A \subset B$ et $B \subset A$ (preuve de l'égalité entre deux ensembles par double inclusion)

- (4) Si A n'est pas inclus dans E , on note: $A \not\subset E$. Ce qui signifie: $\exists a \in A, a \notin E$.

En effet : $\text{non}(A \subset E) = A \not\subset E$, et la négation donne : $\text{non}(\forall a \in A, a \in E) = \exists a \in A, a \notin E$.

1.3 Cas particulier des parties de \mathbb{R} : bornes supérieure et inférieure.

1.3.1 Majorants et minorants

Définition 5 Soit A une partie de \mathbb{R} .

(1) **Majorants:**

* On dit que le réel M est un **majorant de A** (ou que A est **majorée par M**) si: $\forall a \in A, a \leq M$.

* On dit que A est **majorée** s'il existe un majorant de A : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq M$.

(2) **Minorants:**

* On dit que le réel m est un **minorant de A** (ou que A est **minorée par m**) si: $\forall a \in A, a \geq m$.

* On dit que A est **minorée** s'il existe un minorant de A : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \geq m$.

(3) On dit que A est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée: $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, m \leq a \leq M$.

Remarque 7 Bien noter la place des quantificateurs.

Remarque 8 De façon équivalente, on peut utiliser la valeur absolue pour exprimer que A est bornée:
 $\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall a \in A, |a| \leq K$.

Preuve:

■

Exemple 6 :

- (1) $]0, 1[$ est borné: majoré par 1 et minoré par 0.
- (2) $] - \infty, 3]$ est non minoré et majoré par 3.

Remarque 9 :

- (1) Il n'y a pas toujours existence d'un minorant / majorant!
- (2) Un majorant / minorant n'appartient pas forcément à A !

Exemple 7 : cas des fonctions numériques. La définition 4 devient:

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. (avec $A = \{f(x), x \in \mathcal{D}_f\}$)

- (1) $M \in \mathbb{R}$. M est un **majorant** de f si: $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) \leq M$.
- (2) $m \in \mathbb{R}$. m est un **minorant** de f si: $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) \geq m$.
- (3) f est **bornée** si f admet à la fois un minorant et un majorant:

$$\exists m, M \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}_f, m \leq f(x) \leq M \text{ ou } \exists K \geq 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |f(x)| \leq K.$$

* $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ n'est ni majorée ni minorée sur \mathbb{R}^* , mais minorée (par 0) sur $]0, +\infty[$.

* $(x \mapsto x^2)$ est minorée par 0 ($f(0) = 0$), mais non majorée sur \mathbb{R} : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 = 0^2$.

* exp est minorée par 0, non majorée sur \mathbb{R} : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

* sin est bornée sur \mathbb{R} : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$.

ATTENTION!! Minorant et majorant sont des réels **indépendants de x !** (on veillera donc à la place des quantificateurs)

1.3.2 Maximum et minimum

Définition 6 Soit A une partie de \mathbb{R} .

(1) Si M est un majorant de A qui appartient à A alors M est unique. On dit que M est le **maximum de A** que l'on note $\boxed{\max A}$

(2) Si m est un minorant de A qui appartient à A alors m est unique. On dit que m est le **minimum de A** que l'on note $\boxed{\min A}$

Preuve:

■

Exemple 8 : cas des fonctions numériques. La définition 5 devient:

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. (avec $A = \{f(x), x \in \mathcal{D}_f\}$)

(1) On dit que f admet un **maximum** en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ (ou x_0 est un point de maximum de f) si: $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) \leq f(x_0)$.

(2) On dit que f admet un **minimum** en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ (ou x_0 est un point de minimum de f) si: $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) \geq f(x_0)$.

Vocabulaire: si un majorant (minorant) est un maximum (minimum), on dit qu'il est **atteint**: $\exists x_0 \in \mathcal{D}_f / M = f(x_0)$.

* La fonction carrée a un minimum (minorant atteint) en 0: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 = 0^2$.

* La fonction exponentielle est minorée en 0 (non atteint): $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

* La fonction sinus atteint une infinité de fois ses majorant ($1 = \sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$) et minorant ($-1 = \sin(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$).

Exemple 9 :

(1) $] -\infty, 3]$ admet 3 pour maximum. On note que l'ensemble des majorants de $] -\infty, 3]$ est $[3, +\infty[$ et que 3 est le plus petit des majorants.

(2) $[0, 1[$ admet 0 pour minimum. On note que l'ensemble des minorants de $[0, 1[$ est $] -\infty, 0]$ et que 0 est le plus grand des minorants.

Par contre 1 n'est pas le maximum de $[0, 1[$ car $1 \notin [0, 1[$. On note quand-même que l'ensemble des majorants de $[0, 1[$ est $[1, +\infty[$ et que 1 est le plus petit des majorants: quel nom lui donner?

1.3.3 Bornes supérieure et inférieure

Définition 7 Soit A une partie de \mathbb{R} .

(1) Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément on l'appelle **borne supérieure de A** et on le note $\sup A$

(2) Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément on l'appelle **borne inférieure de A** et on le note $\inf A$

Exemple 10 $\sup]0, 1[= 1$, $\inf]0, 1[= 0$ et $\sup] - \infty, 3] = \max] - \infty, 3] = 3$.

Remarque 10 En d'autres termes:

(1) $M = \sup A$ ssi M majore A et est le plus petit des majorants. Traduction mathématique:

$$M = \sup A \iff \underbrace{\forall a \in A, a \leq M}_{M \text{ majore } A}, \text{ et } \underbrace{\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, M - \varepsilon < a}_{\text{plus petit des majorants}}$$

Preuve:

\Rightarrow Supposons que $M = \sup A$.

Alors M majore A , donc: $\forall a \in A, a \leq M$.

De plus, M est le plus petit des majorants donc $\forall \varepsilon > 0, M - \varepsilon$ ne majore pas A car $M - \varepsilon < M$. Donc il existe $a \in A$ tel que $a > M - \varepsilon$.

\Leftarrow Supposons que $\forall a \in A, a \leq M$ et que $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, M - \varepsilon < a$.

Puisque $\forall a \in A, a \leq M$, cela signifie que M est un majorant de A .

Par ailleurs, si M n'était pas le plus petit des majorants, alors il existe $M' < M$ qui majore A . Posons $\varepsilon = M - M' > 0$.

Donc $\forall a \in A, a \leq M' = M - \varepsilon$: ABSURDE.

Conclusion: M est bien le plus petit des majorants et $M = \sup A$.

■

(2) De même: $m = \inf A$ ssi m minore A et est le plus grand des minorants. Traduction mathématique:

$$m = \inf A \iff \underbrace{\forall a \in A, a \geq m}_{m \text{ minore } A}, \text{ et } \underbrace{\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, m + \varepsilon > a}_{\text{plus grand des minorants}}$$

Et l'existence?

Théorème 1 (admis):

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de \mathbb{R} admet une borne supérieure (resp. inférieure).

2 Opérations sur $\mathcal{P}(E)$

2.1 Intersection

Définition 8 $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, l'**intersection** entre A et B est définie par: $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ ET } x \in B\}$

Remarque 11 De la même façon, pour toute famille de parties de E , $(A_k)_{k \in [1, n]}$, l'intersection des n ensembles $A_1 \cap \dots \cap A_n$

s'écrit aussi $\bigcap_{k=1}^n A_k$: c'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à tous les ensembles A_k :

$$x \in \bigcap_{k=1}^n A_k \iff \forall k \in [1, n], x \in A_k$$

Proposition 3 (ADMISE):

(1) $A \cap B = B \cap A$ (commutatif). (2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associatif).

(3) $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.

Définition 9 Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$ (aucun élément en commun).

Exemple 11 :

(1) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(2) $A = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$ sont disjoints: un même entier naturel ne peut être à la fois pair et impair.

(3) $]2, 4[$ et $[4, +\infty[$ sont disjoints (importance du sens des crochets).

Remarque 12 Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$.

2.2 Réunion

Définition 10 $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, on définit leur **union** par: $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ OU } x \in B\}$

Remarque 13 :

(1) $x \in A \cup B$ si x appartient *au moins* à l'un des deux ensembles (ou *inclusif*).

Par contre, si A et B sont disjoints, alors le OU de $A \cup B$ est *exclusif*: un élément de $A \cup B$ est *soit* dans A *soit* dans B .

(2) De la même façon, pour toute famille de parties de E , $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, l'union des n ensembles A_1, \dots, A_n s'écrit aussi $\bigcup_{i=1}^n A_i$, c'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent au moins à l'un des ensembles A_i :

$$x \in \bigcup_{i=1}^n A_i \iff \exists i \in \{1, \dots, n\} / x \in A_i$$

Exemple 12 :

(1) $A \cup \emptyset = A$; $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

(2) $A = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des entiers pairs. $A \subset \mathbb{N}$.

$B = \{2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des entiers impairs. $B \subset \mathbb{N}$.

On a $A \cup B = \mathbb{N}$.

(3) Considérons $E = [0, 10[$ et $\forall i \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$, $A_i = [i, i + 1[$. On a $\bigcup_{i=0}^9 A_i = E$.

Remarque 14 Si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$.

Proposition 4 (ADMISE):

(1) $A \cup B = B \cup A$ (*commutatif*). (2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (*associatif*).

(3) $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$. (4) Si $A \subset C$ et $B \subset C$ alors $A \cup B \subset C$.

Proposition 5 (ADMISE):

(1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

(2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Remarque 15 (généralisation à un nombre fini d'ensembles):

Pour toutes parties A, B_1, \dots, B_n ($n \in \mathbb{N}^*$) d'un ensemble E , on a:

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i) \text{ et } A \cup \left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \cup B_i)$$

2.3 Complémentaire

Définition 11 $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, on définit son **complémentaire**, noté $E \setminus A$ ou \bar{A} , par: $\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$

Exemple 13 :

(1) Soit un ensemble E : $\bar{\bar{E}} = \emptyset$ et $\bar{\emptyset} = E$.

(2) $\mathbb{R} \setminus]-\infty, 0] =]0, +\infty[$.

Proposition 6 :

(1) $\bar{\bar{A}} = A$

(2) **Lois de Morgan:** $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Preuve:

(1) Par définition, $\bar{\bar{A}} = \{x \in E / x \notin \bar{A}\} = \{x \in E / x \in A\} = A$.

(2)

$$x \in \overline{A \cap B} \iff x \notin A \cap B \iff \text{non}(x \in A \cap B) \iff \dots$$

Conclusion: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

* En appliquant la formule précédente à \bar{A} et \bar{B} , il vient: $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = \overline{\bar{A}} \cup \overline{\bar{B}} = A \cup B$.

Donc $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = A \cup B$.

Remarque 16 (généralisation à un nombre fini d'ensembles):

Pour toutes parties A_1, \dots, A_n ($n \in \mathbb{N}^*$) d'un ensemble E , on a:

$$\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i} \text{ et } \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$$

2.4 Partition, système complet

Définition 12 Soient A_1, \dots, A_n une famille de parties de E . $(A_i)_{i \in [1, n]}$ forme une **partition** de E si:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall i \in I, A_i \neq \emptyset \\ \bullet \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ (deux à deux disjoints)} \\ \bullet \bigcup_{i \in I} A_i = E \end{array} \right.$$

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 : savoir former une partition, ou un système complet, d'un ensemble.

(1) $A = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{2n+1, n \in \mathbb{N}\}$ forment une partition de \mathbb{N} : un entier naturel est *soit* pair *soit* impair.

(2) Soit $A_i = [i, i+1[$, $i \in [0, 9]$.

La famille $(A_i)_{i \in [0, 9]}$ forme une partition de $[0, 10[$.

(3) Considérons $A =]-\infty, 0]$ et $B = [0, +\infty[$.

$A \cup B = \mathbb{R}$, mais A et B ne forment pas une partition de \mathbb{R} car $A \cap B = \{0\} \neq \emptyset$!

Par contre, $] -\infty, 0[$ et $[0, +\infty[$ forment une partition de $\mathbb{R} \dots$

(4) *Situations probabilistes:*

- On lance un dé à six faces et on note $E =$ “on obtient un numéro pair” = $\{2, 4, 6\}$.
Les singletons $\{2\}$, $\{4\}$ et $\{6\}$ forment une partition de E .

- On lance deux fois de suite une pièce de monnaie et on note $E =$ “on obtient une seule fois face”.
Les ensembles $\{(P, F)\}$ (pile puis face) et $\{(F, P)\}$ (face puis pile) forment une partition de E .

Définition 13 Soit E un ensemble et A_1, \dots, A_n une famille de parties de E .

$(A_i)_{i \in [1, n]}$ est un **système complet de E** si les parties sont deux à deux disjointes, de réunion égale à E :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ (deux à deux disjoints)} \\ \bullet \bigcup_{i \in I} A_i = E \end{array} \right.$$

Remarque 17 La différence entre partition et système complet de E est que pour une partition, toutes les parties doivent être non vides, ce qui n'est pas le cas d'un système complet.

POINT METHODE 3 : Penser au complémentaire pour former un système complet ou une partition:

- A et $E \setminus A$ étant toujours disjoints, ils forment TOUJOURS un système complet de E .
- Attention, pour une partition: $\forall A \in \mathcal{P}(E)$ tel que A non vide et $A \neq E$, A et $E \setminus A$ forment une partition de E .

2.5 Différence

Définition 14 Soient A et B deux parties de E . On définit leur **différence** par: $A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$

Exemple 14 $\mathbb{R} \setminus [-1, 1] =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Remarque 18 On a $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

d'où l'écriture: $\overline{A} = E \cap \overline{A} = E \setminus A \dots$

3 Produit cartésien

Définition 15 :

Soient E et F deux ensembles. On définit leur **produit cartésien** par: $E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$

Les éléments de $E \times F$ sont appelés **couples** ou **2-uplets**.

Exemple 15 Le plan $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Un élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un couple (de coordonnées) (x_0, y_0) où $x_0 \in \mathbb{R}$ (est appelé abscisse) et $y_0 \in \mathbb{R}$ (est appelé ordonnée).

On peut les tracer dans un repère:

Donc, par exemple: $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$, $(-5, 7) \in \mathbb{R}^2$. On remarque que $(1, 2) \neq (2, 1)$, donc l'ordre est important!

Exemple 16 :

(1) $(-2, \sqrt{5}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ car $-2 \in \mathbb{Z}$ et $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$. Mais $(\sqrt{5}, -2) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ car $\sqrt{5} \notin \mathbb{Z}$.

(2) $E = \{1, 2\}$ et $F = \{0, 1, 2\}$. Déterminons $E \times F$.

Tableau à deux entrées:

$E \setminus F$	0	1	2
1	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)
2	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)

Donc $E \times F = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$.

On remarque que $(1, 0) \in E \times F$ mais $(0, 1) \notin E \times F$.

Remarque 19 De la même façon, on peut définir le produit cartésien de n ensembles E_1, E_2, \dots, E_n par:

$E_1 \times \dots \times E_n$ est l'ensemble des **n-uplets** (x_1, \dots, x_n) où $x_i \in E_i, \forall i \in [1, n]$.

Si $E_i = E \forall i \in [1, n]$, on note $E_1 \times \dots \times E_n = E^n = \{(x_1, \dots, x_n) / \forall k \in [1, n], x_k \in E\}$.

Un élément (x_1, \dots, x_p) de E^p sera appelé une **p-liste** d'éléments de E (au lieu de **p-uplet**).

Exemple 17 L'espace $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On ajoute une coordonnée à \mathbb{R}^2 : la côte.

Un 3-uplet de \mathbb{R}^3 a donc 3 coordonnées: (x_0, y_0, z_0) .