Vocabulaire des ensembles

I. Opérations sur les parties d'un ensemble

Exercice 1 Écrire en extension (i.e en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants:

1. $A = \left\{\text{entiers compris entre } \sqrt{2} \text{ et } 2\pi\right\}$
2. $B = \left\{x^2 / x \in \{-1, 0, 1\}\right\}$
3. $C = \{(x, y) \in [\![1, 3]\!] \times \{-1, 1\}\}$
4. $D = [\![1, 3]\!] \times [\![-1, 1]\!]$
5. $E = \{-1, 1\}^3$

Exercice 2 Dans chacune des questions suivantes, on donne un ensemble E et des parties A et B de E. Déterminer les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap B$:

1. $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 4\}$
2. $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty, 3]$ et $B = [2, +\infty[$
3. $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty, 2]$ et $B = [3, +\infty[$
4. $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$ et $B =]0, +\infty[$

Exercice 3 On se donne un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$: $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + y = 0\right\}$

1. Est-ce-que $(0, 0) \in E$?
2. Est-ce-que $(-1, 2) \in E$?
3. Donner un élément de $\mathbb{R}^2$ qui appartient à E et un autre qui n'appartient pas à E.
4. Soient $(x, y) \in E$ et $(a, b) \in E$. Montrer que $2\,(x, y) - (a, b) \in E$.

Exercice 4 On se donne un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$: $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x\,y\,z = 2\right\}$

1. Est-ce-que $(0, 0, 0) \in E$?
2. Est-ce-que $(2, \frac{1}{4}, 2) \in E$?
3. Donner un élément de $\mathbb{R}^3$ qui appartient à E et un autre qui n'appartient pas à E.

Exercice 5 On définit les deux parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 4x - y = 1\right\} \text{ et } B = \{(t + 1, 4\,t + 3), t \in \mathbb{R}\} .$$

Montrer que $A = B$

Exercice 6 Soit $K = \{(0, 1); (1, 0)\}$. Montrer qu'il n'existe pas de parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $K = A \times B$.

II. Fonctions majorées, minorées

Exercice 7 On considère les fonctions a et b définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$a(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \geqslant 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases} \qquad b(x) = \begin{cases} 1 + 1/x & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{(-x)} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Sont-elles majorées / minorées? Les majorants / minorants sont-ils atteints?
On pourra s'aider des représentations graphiques de ces fonctions.

Exercice 8 On considère la fonction f définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\; f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}\,.$$

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est non majorée.
3. Vérifier que f est minorée par 0, est-il atteint?

III. Images directe et réciproque

Exercice 9 Déterminer (graphiquement) $\sin(\left[0, \frac{\pi}{2}\right])$, $\tan(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[)$, $\cos(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[)$.

Exercice 10 Représenter graphiquement les fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

$$a(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \geqslant 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases} \qquad b(x) = \begin{cases} 1+1/x & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{(-x)} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Répondre aux questions suivantes en lisant sur les graphes des fonctions concernées:

1. Donner $a(]-\infty, 0])$, $a([0, +\infty[)$ et $\breve{a}([0, 9])$.
2. Donner $b(]0, 2])$, $b([1, +\infty[)$ et $\breve{b}\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\right)$.

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par: $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$, pour tout réel x.
Calculer l'ensemble $\breve{f}([0, 1])$.

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par: $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, pour tout réel x.
Déterminer les ensembles $\breve{f}(\{1\})$ et $\breve{f}(\{\frac{1}{3}\})$.