

Vocabulaire des ensembles

I. Opérations sur les parties d'un ensemble

Exercice 1 Écrire en extension (i.e en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants:

1. $A = \{\text{entiers compris entre } \sqrt{2} \text{ et } 2\pi\}$
2. $B = \{x^2/x \in \{-1, 0, 1\}\}$
3. $C = \{(x, y) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \times \{-1, 1\}\}$
4. $D = \llbracket 1, 3 \rrbracket \times \llbracket -1, 1 \rrbracket$
5. $E = \{-1, 1\}^3$

Exercice 2 On considère les quatre parties de \mathbb{N} suivantes:

$$A = \{n \in \mathbb{N} / \exists k \in \mathbb{N}, n = 4k\} \quad B = \{n \in \mathbb{N} / \exists k \in \mathbb{N}, n = 12k\}$$

$$C = \{n \in \mathbb{N} / \exists k \in \mathbb{N}, n = 16k\} \quad D = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 120\}.$$

1. Montrer que $A \cup B \cup C = A$.
2. Donner la liste des éléments de $C \cap D$ et de $A \cap B \cap C \cap D$.

Exercice 3 On définit les deux parties de \mathbb{R}^2 suivantes :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4x - y = 1\} \text{ et } B = \{(t + 1, 4t + 3), t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que $A = B$

Exercice 4 Soit $K = \{(0, 1); (1, 0)\}$. Montrer qu'il n'existe pas de parties A et B de \mathbb{R} telles que $K = A \times B$.

II. Fonctions majorées, minorées

Exercice 5 On considère les fonctions a et b définies sur \mathbb{R} par:

$$a(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \geq 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases} \quad b(x) = \begin{cases} 1 + 1/x & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Sont-elles majorées / minorées? Les majorants / minorants sont-ils atteints?

On pourra s'aider des représentations graphiques de ces fonctions.

Exercice 6 On considère la fonction f définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}.$$

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est non majorée.
3. Vérifier que f est minorée par 0, est-il atteint?

III. Images directe et réciproque

Exercice 7 Déterminer (graphiquement) $\sin\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\right)$, $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right)$.

Exercice 8 Représenter graphiquement les fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

$$a(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \geq 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases} \quad b(x) = \begin{cases} 1 + 1/x & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Répondre aux questions suivantes en lisant sur les graphes des fonctions concernées:

1. Donner $a(\left]-\infty, 0\right])$, $a(\left[0, +\infty\right[)$ et $\tilde{a}(\left[0, 9\right])$.
2. Donner $b(\left]0, 2\right])$, $b(\left[1, +\infty\right[)$ et $\tilde{b}(\left[1/2, +\infty\right[)$.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par: $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$, pour tout réel x .
Calculer l'ensemble $\check{f}([0, 1])$.

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par: $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, pour tout réel x .
Déterminer les ensembles $\check{f}(\{1\})$ et $\check{f}(\{\frac{1}{3}\})$.