Vocabulaire des applications

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Définition

1.1 Vocabulaire

Définition 1 *Soient E et F deux ensembles.*
f est une **application de** E **dans** F*, notée:*

$$\begin{array}{rcl} f : E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

si à tout élément x de E correspond un unique élément de F noté $f(x)$.
On dit alors que:
• *E et F sont respectivement* **ensemble de départ et d'arrivée***.*
• *$y = f(x)$ est* $\boxed{l'}$**image de** x **par** f *et x est* $\boxed{un}$ **antécédant de** $y = f(x)$ **par** f *(ce n'est pas forcément le seul, et n'existe pas forcément!)*
• *la partie de $E \times F$ définie par $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in E\}$ est le* **graphe** *de f.*
L'ensemble des applications de E dans F est noté $\boxed{\mathcal{F}(E,F) \text{ ou } F^E}$

Exemple 1 :
(1) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
(2) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ n & \mapsto & \sqrt{|n|} \end{array}$ est une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}_+$.
(3) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
$f(2) = \ldots\ldots = f(-2)$ donc 4 a deux antécédants par f! Mais tout réel strictement négatif n'a aucun antécédant par f...
(4) $\begin{array}{rcl} id_E : E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$, pout tout ensemble E.
(5) Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle **fonction indicatrice ou fonction caractéristique de** A l'application notée $\mathbf{1_A}$ ou χ_A et définie par:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{1_A} : \mathbf{E} & \rightarrow & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in E \setminus A \end{cases} \end{array}$$

Remarque 1 : Nuances entre application et fonction.
$*$ *Existence de l'image:*
Une application est définie sur son ensemble de départ: tout élément de l'ensemble de départ admet une unique image.
Ce qui n'est pas forcément vrai pour une fonction: l'ensemble de départ d'une fonction est $\mathbb{R}$, mais certains réels n'ont pas forcément d'image par une fonction.
Une fonction f est définie sur son ensemble de définition, noté $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$: tout élément de l' ensemble de définition admet une unique image.
Donc, si f est une fonction de E dans F telle que $\mathcal{D}_f = E$, f est une application de E dans F.

Exemple 2 :
(1) Considérons $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$.
Il s'agit d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur ......, mais ce n'est pas une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, car tout élément de l'ensemble de départ ($\mathbb{R}$) n'admet pas une unique image.
Par contre, en restreignant l'ensemble de départ à $[0, +\infty[$, on peut associer à f une application:
$\begin{array}{rcl} f : [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$.

(2) A la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$, on peut associer deux applications:

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \ldots\ldots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \ldots\ldots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}.$$

Attention: f_1 et f_2 n'ont pas les mêmes propriétés!

$*$ *Représentation graphique:*
Pour une fonction, la représentation graphique est aisée: le graphe est une courbe tracée dans un repère dont les abscisses sont $x \in \mathcal{D}_f$ et les ordonnées $f(x) \in \mathbb{R}$.
Pour une application, les ensembles de départ et d'arrivée ne sont pas forcément inclus dans $\mathbb{R}$, on ne peut donc pas tracer le graphe dans un repère ...
On peut alors utiliser la représentation suivante (avec les fameuses "patates"):

La flèche part d'un élément de E et pointe son image: $f(a) = b$, $f(d) = f(e) = c$.

Dans la pratique, on utilise indifféremment les notions "fonction" et "application" malgré la nuance qui les distingue.

1.2 Images directe et réciproque

1.2.1 Image directe

Définition 2 *Soit f une application de E dans F.*
Pour toute partie A de E, on appelle **image directe de** A **par** f *l'ensemble des images des éléments de A, noté $f(A)$:*

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F / \exists x \in A, f(x) = y\}.$$

Remarque 2 En d'autres termes: $\boxed{y \in f(A) \iff \exists x \in A, f(x) = y}$

Exemple 3 : $\mathbf{1}_A(A) = \ldots\ldots$

Proposition 1 *Soient une application $f : E \to F$ et A, B deux parties de E telles que $A \subset B$. Alors $f(A) \subset f(B)$.*

1.2.2 Image réciproque

Définition 3 *Soit f une application de E dans F.*
Pour toute partie B de F, on appelle **image réciproque de** B **par** f *l'ensemble des antécédants des éléments de B, noté $\check{f}(B)$:*

$$\check{f}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}.$$

Remarque 3 :
(1) On utilise aussi la notation $f^{-1}(B)$, mais méfiance... (voir la partie sur la bijection réciproque)
(2) En d'autres termes: $\boxed{x \in \check{f}(B) \iff f(x) \in B}$

Exemple 4 : $\check{\mathbf{1}}_A(\{1\}) = \ldots\ldots$ et $\check{\mathbf{1}}_A(\{0\}) = \ldots\ldots$

Proposition 2 *Soient une application $f : E \to F$ et A, B deux parties de F telles que $A \subset B$. Alors $\check{f}(A) \subset \check{f}(B)$.*

1.3 Restriction d'une application

Définition 4 *Soit $f : E \to F$ une application et A une partie de E.*
On appelle **restriction de** f **à** A *l'application suivante notée $f|_A$:*

$$f|_A : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Exemple 5 :
(1) Considérons l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & \sqrt{|n|} \end{array}$.
Si on restreint l'ensemble de départ à $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$), on définit l'application g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ par $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & \sqrt{n} \end{array}$.
Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(n) = \sqrt{n} = \sqrt{|n|}$, g est la restriction de f à $\mathbb{N}$.
(2) $\mathbf{1}_A|_A$ est l'application constante égale à ...
(3) Considérons l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$.
Si on restreint l'ensemble de départ à $]0, +\infty[$ ($]0, +\infty[\subset \mathbb{R}$), on définit la restriction de f à $]0, +\infty[$ par:
$\begin{array}{rccc} h: &]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$.
Que se passe-t-il graphiquement?

1.4 Composition d'applications

Définition 5 *Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G.*
La **composée de** f **par** g**, notée** $g \circ f$**,** *est l' application de E dans G définie par: $\forall x \in E$, $g \circ f(x) = g(f(x))$.*

Remarque 4 :
(1) Dans la composée de f par g, f "agit" AVANT g (de droite à gauche dans la notation $g \circ f$).
(2) Diagramme de $g \circ f$:

Remarque 5 ATTENTION: $\boxed{\text{la composition n'est pas commutative!}}$

Proposition 3 **(associativité):** *Soient trois applications $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. Alors:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f\,.$$

Preuve:

■

2 Applications bijectives

2.1 Applications injectives

Définition 6 *Soit $f : E \to F$ une application.*
On dit que f est **injective** *ou que f* **est une injection de** E **dans** F *ssi tout élément de F admet au plus un antécédant par f:*

Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet 0 ou 1 solution.

Autrement dit: $\boxed{f \text{ est injective ssi } \forall x_1, x_2 \in E\,,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$
Par contraposée:

$$\forall x_1, x_2 \in E\,,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\,.$$

Remarque 6 :
(1) L'injection signifie: SI un antécédant existe, ALORS il est unique (existence d'au plus un antécedant), donc l'injection ne dit pas qu' il y a toujours existence d'un antécédant!! Mais quand il existe, l'injection dit qu'il est "forcément" unique.
(2) Par définition d'une application: si $x_1 = x_2$ alors $f(x_1) = f(x_2)$, donc en fait:

$$f \text{ est injective sur } E \text{ ssi } \forall x_1, x_2 \in E\,,\ f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2.$$

Cette propriété sera utilisée pour résoudre des équations...

Exemple 6 :

POINT METHODE 1 : Comment MONTRER qu'une application est injective?

1. Par la définition: on se donne deux éléments x_1, x_2 de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$, et on montre que $x_1 = x_2$.
2. Pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut utiliser le résultat:

   Théorème 1 *Toute fonction* **strictement** *monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est injective.*

   Preuve:

   ■

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 En s'appuyant sur leur graphe, étudier l'injectivité des fonctions usuelles.

POINT METHODE 2 :

1. **Comment MONTRER qu'une application N'EST PAS injective?**

2. **Comment OBTENIR alors une injection?**
   On restreint $\boxed{\text{l'ensemble de départ}}$ (pour obtenir la stricte monotonie par exemple dans le cas d'une fonction numérique).

   Exemple 7 : Fonctions usuelles.
   En s'appuyant sur leur graphe, pour celles qui ne sont pas injectives sur leur ensemble de définition, proposer un ensemble / intervalle sur lequel elles seront injectives.

Proposition 4 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications injectives. Alors $g \circ f$ est injective sur ...*

Preuve:

$\blacksquare$

2.2 Applications surjectives

Définition 7 *Soit $f : E \to F$ une application.*
On dit que f est **surjective** *ou que f* **est une surjection de E dans F** *ssi tout élément de F admet au moins un antécédant par f, soit:* $\boxed{\forall y \in F,\ \exists x \in E / f(x) = y}$
Autrement dit: pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet au moins une solution.

Remarque 7 :
(1) la surjection affirme l'existence d'un antécédant mais pas son unicité!
(2) Une application f est TOUJOURS une surjection de E dans $f(E)$.
En effet:

Exemple 8 :

POINT METHODE 3 : Comment MONTRER que f est surjective?

1. Par la définition: on se donne $y \in F$ quelconque. On CHERCHE $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
   (méthode d'analyse-synthèse pour les problèmes d'existence)
2. Pour une fonction numérique: calcul de $f(I)$ grâce à la continuité de f sur l' intervalle I de $\mathbb{R}$ et TVI (pour plus tard) + monotonie.

POINT METHODE 4 :

1. **Comment MONTRER qu'une application N'EST PAS surjective?**
2. **Comment OBTENIR alors une surjection?**
   On restreint $\boxed{\text{l'ensemble d'arrivée}}$: il suffit de prendre $F = f(E)$!

   Exemple 9 : Fonctions usuelles.
   En s'appuyant sur leur graphe, pour celles qui ne sont pas surjectives sur leur ensemble de définition, proposer un ensemble / intervalle sur lequel elles seront surjectives.

Proposition 5 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications surjectives. Alors $g \circ f$ est surjective de $\ldots$ dans $\ldots$*

Preuve:

■

2.3 Applications bijectives

2.3.1 Définition

Définition 8 *Soit $f : E \to F$ une application.*
On dit que f est **bijective** *ou* **réalise ou est une bijection de E dans F** *ssi tout élément de F admet un unique antécédant dans E:* $\boxed{\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E / f(x) = y}$
(ou encore: pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet une unique solution.)
Autrement dit: f est bijective de E dans F ssi elle est à la fois injective et surjective.

Exemple 10 :

POINT METHODE 5 : Comment MONTRER que f est bijective?

1. (Dans le cas d'une fonction numérique) On montre qu'elle est injective (stricte monotonie) et surjective (calcul de $f(I)$).

   CAPACITÉ EXIGIBLE 2 En s'appuyant sur leur graphe, étudier la bijectivité des fonctions usuelles.

   Exemple 11 Regardons de plus près les fonctions puissances entières: $(x \mapsto x^n)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pour tout $y \in F$, on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$: on montre qu'elle admet une unique solution.

Exemple 12 Regardons de plus près les fonctions carrée, sinus, cosinus et tangente:

Proposition 6 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective de ... dans ...*

Preuve:

■

2.3.2 Bijection réciproque

Définition 9 *Rappel: f est une application bijective de E dans F si: $\forall y \in F$, $\exists! x \in E / f(x) = y$.*
On note alors $x = f^{-1}(y)$, et puisque x est unique, cela définit bien une nouvelle application (qui est en fait unique), appelée **bijection réciproque** *de f et notée f^{-1}:*

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) \end{array}$$

Remarque 8 $\forall x \in E$, $\forall y \in F$, $\boxed{f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)}$

Preuve (unicité):

■

Exemple 13 : Cas des fonctions numériques: graphiquement, symétrie par rapport à la première bissectrice.

CAPACITÉ EXIGIBLE 3 : calcul de f^{-1}.
$\forall y \in F$, on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.
Si cette équation a une unique solution dans E alors f est bijective de E dans F et on récupère f^{-1} puisque $x = f^{-1}(y)$.

Exemple 14 :
(1) Quelle est la réciproque de la fonction inverse, considérée de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$?

on dit que la fonction inverse est involutive.
(2) Fonction carrée de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$:

(3) Si on reparlait des notations arccos, arcsin et arctan...

Proposition 7 *Soit f une application de E dans F.*
f est bijective ssi il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$. Dans ce cas, $g = f^{-1}$.

Preuve:

■

Exemple 15 En appliquant cette proposition, quelles formules bien connues sur les fonctions ln et exponentielle, carrée et racine carrée, pouvez-vous retrouver? Et sur tan et arctan?

Exemple 16 : Retour sur les fonctions puissances ($x \mapsto x^n$), où $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 8 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors:*
(1) f^{-1} est bijective de F dans E et: $(f^{-1})^{-1} = f$.
(2) $g \circ f$ est bijective de E dans G et: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Preuve:

$\blacksquare$