

Applications - bijections

I. Applications

Exercice 1 On considère les applications $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définies par $f(n) = n + 1$ et $g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$.
Déterminer $g \circ f$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 3 Considérons l'application

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto (-1)^n$$

1. Déterminer l'ensemble image de f : $f(\mathbb{Z})$.
2. Déterminer les images réciproques $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}(\{-1\})$.
3. f est-elle injective? surjective?

II. Résolution d'équations

Exercice 4 Montrer que les fonctions Arctangente et Arcsinus sont impaires.

Exercice 5 Résoudre les équations suivantes:

1. $\sqrt{x-7} = 5-x$
2. $\sqrt{4 + \sqrt{x^2 + x^4}} = 2-x$
3. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
4. $5^{x^3} = 3^{x^5}$
5. $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$.

Exercice 6 Résoudre dans $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$: $\arcsin(\tan x) = x$.

III. Bijections

Exercice 7 On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$.

1. Étudier f sur son ensemble de définition.
2. Donner deux intervalles I et J tels que $f : I \rightarrow J$ soit bijective.

Exercice 8 On considère la fonction $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

1. Étudier f sur son ensemble de définition.
2. Proposer deux intervalles I et J tels que $f : I \rightarrow J$ soit bijective.

Exercice 9 On considère la fonction f d'expression : $f(x) = -\ln |(x+1)(x+2)|$.

1. Étudier f sur son ensemble de définition.
2. Montrer que f est bijective de I dans J , où I et J sont deux intervalles à déterminer.

IV. Fonction réciproque

Exercice 10 Calculer:

1. $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

2. $\arccos\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$

3. $\arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

Exercice 11 Soit f la fonction définie sur $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, par $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $\forall x \in I$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera.
2. Justifier que $\forall x \in J$,

$$\cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \text{ et } \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

Exercice 12 Soit la fonction $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_g de g .
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre $g(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathcal{D}_g$.
Ne pas oublier de préciser les valeurs de y pour lesquelles cette équation n'a pas de solutions!
3. En déduire que g réalise une bijection de \mathcal{D}_g sur un ensemble J , que l'on précisera. Déterminer g^{-1} .

Exercice 13 Montrer que la fonction suivante est bijective et déterminer sa réciproque: $h(x) = \frac{2x+1}{x+2}$.

Exercice 14 (suite de l'exercice 7.)

Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ dans $\left]0, \frac{4}{3}\right]$ et calculer sa réciproque f^{-1} .

Exercice 15 (suite de l'exercice 8.)

Montrer que f est bijective de $]1, +\infty[$ dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et déterminer sa réciproque f^{-1} .

Exercice 16 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

Montrer que f est bijective de \mathbb{R} dans $] -1, 1[$ et calculer sa réciproque.

Exercice 17 On définit la fonction **sinus hyperbolique** notée sh par:

$$\begin{aligned} \text{sh} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

1. Étudier sh sur \mathbb{R} .
2. On pose $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
 - (a) Calculer son ensemble de définition \mathcal{D}_f .
 - (b) $\forall x \in \mathcal{D}_f$, calculer $\text{sh} \circ f(x)$.
Montrer que $f \circ \text{sh}$ est bien définie sur \mathbb{R} et calculer $f \circ \text{sh}(x)$ pour tout réel x .
 - (c) Que peut-on en conclure?