Applications - bijections

I. Applications

Exercice 1 On considère les applications $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies par $f(n) = n+1$ et $g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$
Déterminer $g \circ f$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 3 Considérons l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & (-1)^n \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble image de f: $f(\mathbb{Z})$.
2. Déterminer les images réciproques $\check{f}(\{1\})$ et $\check{f}(\{-1\})$.
3. f est-elle injective? surjective?

II. Résolution d'équations

Exercice 4 Montrer que les fonctions Arctangente et Arcsinus sont impaires.

Exercice 5 Résoudre les équations suivantes:

1. $\sqrt{x-7} = 5 - x$
2. $\sqrt{4 + \sqrt{x^2 + x^4}} = 2 - x$.
3. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.
4. $5^{x^3} = 3^{x^5}$.

Exercice 6 Résoudre dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\arcsin(\tan x) = x$.

III. Bijections

Exercice 7 On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$.

1. Étudier f sur son ensemble de définition.
2. Donner deux intervalles I et J tels que $f : I \to J$ soit bijective.

Exercice 8 On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

1. Étudier f sur son ensemble de définition.
2. Proposer deux intervalles I et J tels que $f : I \to J$ soit bijective.

Exercice 9 On considère la fonction f d'expression : $f(x) = -\ln |(x+1)(x+2)|$.

1. Étudier f sur son ensemble de définition.
2. Montrer que f est bijective de I dans J, où I et J sont deux intervalles à déterminer.

Exercice 10 On considère la fonction f d'expression : $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{x^2-9}}$.

1. Étudier f sur son ensemble de définition.
2. Montrer que f est bijective de I dans J, où I et J sont deux intervalles à déterminer.

IV. Fonction réciproque

Exercice 11 Calculer:

1. $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
2. $\arccos\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$
3. $\arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

Exercice 12 Soit f la fonction définie sur $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, par $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $\forall x \in I$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera.
2. Justifier que $\forall x \in J$,
$$\cos\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{x} \text{ et } \sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

Exercice 13 Soit la fonction $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de g.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre $g(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathcal{D}_g$.
Ne pas oublier de préciser les valeurs de y pour lesquelles cette équation n'a pas de solutions!
3. En déduire que g réalise une bijection de $\mathcal{D}_g$ sur un ensemble J, que l'on précisera. Déterminer g^{-1}.

Exercice 14 Montrer que la fonction suivante est bijective et déterminer sa réciproque: $h(x) = \frac{2x+1}{x+2}$.

Exercice 15 (suite de l'exercice 7.)
Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ dans $\left]0, \frac{4}{3}\right]$ et calculer sa réciproque f^{-1}.

Exercice 16 (suite de l'exercice 8.)
Montrer que f est bijective de $]1, +\infty[$ dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et déterminer sa réciproque f^{-1}.

Exercice 17 On définit la fonction **sinus hyperbolique** notée sh par:

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{sh} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

1. Étudier sh sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J à préciser.
3. Calculer sa réciproque sh^{-1}.