Dénombrement

I. Cardinal d'une union.

Exercice 1 Dans un centre de vacances accueillant cent vingts personnes, on sait que vingt-quatre personnes font du tennis et quinze du canoë. Six personnes pratiquent à la fois tennis et canoë.
Combien de personnes ne pratiquent aucun des deux sports?

Exercice 2 Une tentative d'homicide par balle a eu lieu au cours d'un bal. La police a retrouve dix-huit personnes présentes au moment du drame. Elle leur a demandé de répondre soit par oui soit par non à chacune des questions suivantes :

- Avez-vous entendu une détonation ?
- Avez-vous quelqu'un s'enfuir ?

Dix personnes ont répondu "oui" à la première question ; Six personnes ont répondu "non" à la deuxième question ; Cinq personnes ont répondu "non" aux deux questions.
Combien de personnes ont répondu "oui" aux deux questions ?

II. Dénombrement classique.

Exercice 3 Dans un jeu de 32 cartes, on en tire 5 au hasard simultanément.

1. Combien y a-t-il de mains possibles?
2. Combien y a-t-il de mains contenant la dame de coeur et deux carreaux?

Exercice 4 On dispose d'une urne contenant 10 boules: 5 vertes numérotées de 1 à 5, 3 rouges numérotées de 6 à 8 et 2 bleues numérotées de 9 à 10. On tire au hasard trois boules.

1. On tire successivement, avec remise, trois boules de numéro pair. Combien y a-t-il de tirages possibles?
2. On tire successivement et sans remise trois boules de numéro pair. Combien y a-t-il de tirages possibles?

Exercice 5 Une course oppose 20 concurrents, dont Emile.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles?
2. Combien y a-t-il de podiums possibles où Emile est premier?
3. Combien y a-t-il de podiums possibles dont Emile fait partie?

Exercice 6 On dispose d'un alphabet de deux lettres A et B.

1. Combien de mots de longueur n peut-on former à l'aide de cet alphabet?
2. Combien de mots de longueur n contenant exactement k fois la lettre A peut-on former avec cet alphabet?

Exercice 7 On fabrique un mot de 4 lettres (ayant un sens ou non) choisies au hasard parmi les 8 lettres du mot: THÉORÈME.

1. Combien y a-t-il de mots possibles?
2. Combien y a-t-il de mots contenant 4 voyelles? Exactement 2 voyelles?

Exercice 8 Un code d'immeuble est formé d'une suite constituée d'une lettre (A ou B) et de quatre chiffres (de 0 à 9), la lettre étant située à une place quelconque de la suite.

1. Combien y a-t-il de codes possibles?
2. Combien y a-t-il de codes contenant la lettre A et deux fois exactement le chiffre 7?
3. Ayant oublié le code, mais se souvenant que le code commence par la lettre et constatant que les touches $1, 4, 9$ et B sont plus usées que les autres, combien de codes doit-on tester pour être sûr d'ouvrir la porte de l'immeuble?

Exercice 9 Combien y a-t-il d'anagrammes du mot "BCPST"? "mouton"? "cellule"? "MISSISSIPPI"?

III. Dénombrement par disjonction de cas, par le complémentaire.

Exercice 10 Dans un jeu de 32 cartes, on en tire 5 au hasard simultanément. Combien y a-t-il de mains contenant

1. au plus un roi? au moins un roi? exactement un roi?
2. deux rois et trois piques?

Exercice 11 On dispose d'une urne contenant 10 boules: 5 vertes numérotées de 1 à 5, 3 rouges numérotées de 6 à 8 et 2 bleues numérotées de 9 à 10. On tire au hasard trois boules.
On tire simultanément deux boules de la même couleur et une troisième d'une couleur différente. Combien y a-t-il de tirages possibles?

Exercice 12 Un code d'accès à un service est composé de 6 chiffres de 0 à 9.
Combien y a-t-il de codes contenant

1. au moins 2 chiffres pairs?
2. des chiffres deux à deux distincts?
3. au moins 2 chiffres pairs et des chiffres deux à deux distincts?

Exercice 13 Une urne contient une boule noire et $(n-1)$ boules blanches. On effectue n tirages au hasard d'une boule avec remise.

1. Donner le nombre de résultats possibles.
2. On note $A = \{\text{la boule noire sort à au moins un tirage}\}$. Calculer card (A).

Exercice 14 On monte un escalier de n marches. À chaque pas, on franchit soit une marche , soit deux marches. On note p_n le nombre de façons d'arriver à la n-ième marche.

1. Que valent p_1 et p_2 ?
2. Déterminer une relation de récurrence entre p_n, p_{n-1} et p_{n_2}
3. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

IV. Méthode du double décompte.

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère deux ensembles disjoints E et F ayant tous les deux n éléments. En dénombrant de deux manières le nombre de façons de choisir n éléments dans $E \cup F$, montrer que:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Exercice 16 Un livre comporte 14 chapitres.

1. Combien y a-t-il de façons de choisir 3 chapitres dans ce livre?
2. Pour $k = 3, \ldots, 14$, dénombrer les choix de 3 chapitres pour lesquels k est le plus grand numéro des chapitres choisis.
3. En déduire que:
$$\binom{14}{3} = \binom{13}{2} + \binom{12}{2} + \ldots + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}.$$
4. Généraliser les dénombrements précédents pour démontrer que, pour $1 \leqslant p \leqslant n$, on a:
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 17 Montrer la formule de Van der Monde :

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in [\![0, p+q]\!]\,, \; \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$