Dénombrement

I. Cardinal d'une union.

Exercice 1 :

1. Dans un centre de vacances accueillant cent vingts personnes, on sait que vingt-quatre personnes font du tennis et quinze du canoë. Six personnes pratiquent à la fois tennis et canoë.
   Combien de personnes ne pratiquent aucun des deux sports?

2. Dans une classe de 26 élèves, 22 étudient l'anglais, 16 l'allemand et 10 l'espagnol. On sait en outre que 12 étudient à la fois l'anglais et l'allemand, que 4 étudient à la fois l'allemand et l'espagnol et 8 à la fois l'anglais et l'espagnol.
   Combien d'élèves étudient les trois langues?

II. Dénombrement classique.

Exercice 2 Dans un jeu de 32 cartes, on en tire 5 au hasard simultanément.

1. Combien y a-t-il de mains possibles?
2. Combien y a-t-il de mains contenant la dame de coeur et deux carreaux?

Exercice 3 On dispose d'une urne contenant 10 boules: 5 vertes numérotées de 1 à 5, 3 rouges numérotées de 6 à 8 et 2 bleues numérotées de 9 à 10. On tire au hasard trois boules.

1. On tire successivement, avec remise, trois boules de numéro pair. Combien y a-t-il de tirages possibles?
2. On tire successivement et sans remise trois boules de numéro pair. Combien y a-t-il de tirages possibles?

Exercice 4 Une course oppose 20 concurrents, dont Emile.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles?
2. Combien y a-t-il de podiums possibles où Emile est premier?
3. Combien y a-t-il de podiums possibles dont Emile fait partie?

Exercice 5 On dispose d'un alphabet de deux lettres A et B.

1. Combien de mots de longueur n peut-on former à l'aide de cet alphabet?
2. Combien de mots de longueur n contenant exactement k fois la lettre A peut-on former avec cet alphabet?

Exercice 6 On fabrique un mot de 4 lettres (ayant un sens ou non) choisies au hasard parmi les 8 lettres du mot: THÉORÈME.

1. Combien y a-t-il de mots possibles?
2. Combien y a-t-il de mots contenant 4 voyelles? Exactement 2 voyelles?

Exercice 7 Un code d'immeuble est formé d'une suite constituée d'une lettre (A ou B) et de quatre chiffres (de 0 à 9), la lettre étant située à une place quelconque de la suite.

1. Combien y a-t-il de codes possibles?
2. Combien y a-t-il de codes contenant la lettre A et deux fois exactement le chiffre 7?
3. Ayant oublié le code, mais se souvenant que le code commence par la lettre et constatant que les touches $1, 4, 9$ et B sont plus usées que les autres, combien de codes doit-on tester pour être sûr d'ouvrir la porte de l'immeuble?

Exercice 8 Combien y a-t-il d'anagrammes du mot "BCPST"? "mouton"? "cellule"? "MISSISSIPPI"?

Exercice 9 La fabrication d'une pièce mécanique nécessite de faire passer celle-ci successivement sur cinq machines: A,B,C,D et E. Déterminer les ordres de passages possibles dans chacun des cas suivants:

1. l'ordre de passage est indifférent.

2. La pièce doit d'abord passer par A.
3. La pièce doit passer par A avant B et C.
4. La pièce doit passer directement de la machine A à la machine B dans cet ordre.

Exercice 10 Quel est le nombre de suites de 3 entiers pris dans $[\![1, 10]\!]$ strictement croissantes?

III. Dénombrement par disjonction de cas, par le complémentaire.

Exercice 11 Dans un jeu de 32 cartes, on en tire 5 au hasard simultanément. Combien y a-t-il de mains contenant

1. au plus un roi? au moins un roi? exactement un roi?
2. deux rois et trois piques?

Exercice 12 On dispose d'une urne contenant 10 boules: 5 vertes numérotées de 1 à 5, 3 rouges numérotées de 6 à 8 et 2 bleues numérotées de 9 à 10. On tire au hasard trois boules.
On tire simultanément deux boules de la même couleur et une troisième d'une couleur différente. Combien y a-t-il de tirages possibles?

Exercice 13 Un code d'accès à un service est composé de 6 chiffres de 0 à 9.
Combien y a-t-il de codes contenant

1. au moins 2 chiffres pairs?
2. des chiffres deux à deux distincts?
3. au moins 2 chiffres pairs et des chiffres deux à deux distincts?

Exercice 14 Une urne contient une boule noire et $(n-1)$ boules blanches. On effectue n tirages au hasard d'une boule avec remise.

1. Donner le nombre de résultats possibles.
2. On note $A = \{\text{la boule noire sort à au moins un tirage}\}$. Calculer card (A).

IV. Méthode du double décompte.

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère deux ensembles disjoints E et F ayant tous les deux n éléments. En dénombrant de deux manières le nombre de façons de choisir n éléments dans $E \cup F$, montrer que:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Exercice 16 Un livre comporte 14 chapitres.

1. Combien y a-t-il de façons de choisir 3 chapitres dans ce livre?
2. Pour $k = 3, \ldots, 14$, dénombrer les choix de 3 chapitres pour lesquels k est le plus grand numéro des chapitres choisis.
3. En déduire que:
$$\binom{14}{3} = \binom{13}{2} + \binom{12}{2} + \ldots + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}.$$
4. Généraliser les dénombrements précédents pour démontrer que, pour $1 \leqslant p \leqslant n$, on a:
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 17 Montrer la formule de Van der Monde :

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in [\![0, p+q]\!], \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$