Dénombrement

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Ensembles finis (cardinaux)

1.1 Définition

***Définition 1* :**
E est un ensemble **fini** *s'il est vide (ne contient aucun élément) ou s'il possède un nombre fini d'éléments (deux à deux distincts).*
On appelle **cardinal de** *E, et on note card(E), le nombre d'éléments de E.*
Déterminer le cardinal d'un ensemble fini E, c'est **dénombrer** *E.*

Exemple 1 card $\emptyset = 0$; $E = \{1, 2, 3\}$. E est fini et card(E)$= 3$.

1.2 Cardinal d'une réunion

***Proposition 1* (admise):**
(1) Soient E et F deux ensembles finis, alors $E \cup F$ est finie et:

$$\boxed{card\ (E \cup F) = card\ E + card\ F - card\ (E \cap F)}$$ **Formule de Poincaré**

En particulier, si E et F sont **disjoints**, *card $(E \cup F)$ =card E+ card F.*
(2) Soient E, F, G trois ensembles finis, alors $E \cup F \cup G$ est finie et:

$$\boxed{card\ (E \cup F \cup G) = card\ E + card\ F + card\ G - [\ card\ (E \cap F) + card\ (E \cap G) + card\ (F \cap G)] + card\ (E \cap F \cap G)}$$

*"Patates":***:**
(1) On compte deux fois card $(E \cap F)$:

(2) On compte deux fois card $(E \cap F)$, card $(E \cap G)$ et card $(F \cap G)$, et on compte trois fois card $(E \cap F \cap G)$:

Remarque 1 Le cardinal de l'union se généralise à n ensembles finis, mais la formule (**formule du crible**) est très difficile à écrire.
En revanche, si les ensembles sont **disjoints deux à deux**:

Corollaire 1 *Soient $E_1, \ldots, E_n$, n ensembles finis* **deux à deux disjoints**, *alors:*

$$\boxed{card\ (E_1 \cup \ldots \cup E_n) = \sum_{k=1}^{n} card\ E_k}$$

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 : Dénombrement par disjonction de cas (partition ou système complet):
Dans la formule du crible, le OU est inclusif, tandis que dans la formule du Corollaire, le OU est exclusif.
Donc, pour dénombrer un ensemble, on sera souvent amené à le "découper" en plusieurs sous-ensembles deux à deux disjoints (faire des cas: **soit** ... **soit** ...), pour ensuite sommer les cardinaux de ces sous-ensembles.

Exemple 2 Dans un jeu de 32 cartes, on tire 5 cartes simultanément. Dénombrer les mains ayant au moins un as.

Etape 1: $\boxed{\text{ENSEMBLES}}$
Soit $A = \{$ mains ayant au moins un as $\}$. On cherche card(A).
(ATTENTION! Ne pas confondre ensemble et cardinal: écrire $A = \{$ nombre de mains ayant au moins un as $\}$ est faux...)

Etape 2: $\boxed{\text{FORMULE}}$

Etape 3: $\boxed{\text{CALCULS}}$ (cf Parties 2. et 3.)

1.3 Cardinal d'une partie

Proposition 2 *Soit E un ensemble fini et A, B deux parties de E. Alors:*
(1) $card\ (E \setminus A) = card\ E -\ card\ A$.
(2) $card\ (B \setminus A) = card\ B -\ card\ (A \cap B)$.

Preuve: On applique la formule de Poincaré aux ensembles disjoints suivants:
(1) $E = A$ et $F = E \setminus A$, de réunion E.
(2) $E = B \setminus A$ et $F = B \cap A$, de réunion B.

∎

CAPACITÉ EXIGIBLE 2 : dénombrement en utilisant le complémentaire:
Il faut surtout penser à cette méthode quand elle évite de faire une partition ou un système complet.
Reprise de l'exemple 2:
$\boxed{\text{ENSEMBLES}}$
Si on considère plutôt $E = \{$ mains possibles $\}$ et $E \setminus A = \{$ $\}$, alors:
$\boxed{\text{FORMULE}}$

$\boxed{\text{CALCULS}}$ Il y a donc moins de calculs à faire qu'en passant par une partition...!

Proposition 3 *Soit E un ensemble fini. Alors:*
toute partie A de E est finie et $card(A) \leqslant card(E)$, avec le cas d'égalité: $A = E \iff card(A) = card(E)$.

Preuve:

∎

POINT METHODE 1 : Egalité de deux ensembles FINIS:
D'après le cours de Logique, on démontre que deux ensembles sont égaux ($E = F$) par double inclusion: $E \subset F$ et $F \subset E$.
Quand les ensembles sont FINIS, il suffit de montrer une des deux inclusions (on montre la plus simple en général) et de montrer que les cardinaux sont égaux.
(Méthode à retenir pour l'algèbre linéaire, dans le cas d'espaces vectoriels de dimension FINIE.)

1.4 Cardinal d'un produit cartésien

Proposition 4 **(admise):** *Soient E et F deux ensembles finis.*
Alors leur produit cartésien $E \times F$ est fini et: $\boxed{\textit{card } E \times F = \textit{card } E \times \textit{ card } F}$

Remarque 2 :
(1) Pour bien comprendre cette formule, on peut considérer un tableau à deux entrées:

$E \setminus F$	0	1	2
1	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$
2	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$

(2) ATTENTION!! Dans cette formule le signe $\times$ n'est pas le même!
dans $E \times F$: il s'agit du signe du produit cartésien, qui se lit "croix",
dans card $E\times$ card F: il s'agit du signe "multiplier" chez les réels, qui se lit "fois".
(3) Généralisation (par récurrence) à n ensembles $E_1 \times \ldots \times E_n$: card $(E_1 \times \ldots \times E_n) =$ card $E_1 \times \ldots \times$ card E_n.
En particulier, $\boxed{\text{card } (E^n) = (\text{card } E)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*}$

2 Dénombrement des applications (choix successifs)

(La notion d'ORDRE dans ce paragraphe est primordiale: l'ordre des éléments compte)

2.1 Nombre d'applications

Définition 2 *Soit E un ensemble.*
*Une p-**liste** de E est un élément de E^p (ou p-uplet d'éléments de E): $(x_1, \ldots, x_p)$ où $x_i \in E$ $\forall i \in [|1,p|]$.*

Théorème 1 *Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est n^p.*

Preuve: Soit E un ensemble à n éléments, soit card$(E) = n$. Par définition du produit cartésien, l'ensemble de toutes les p-listes de E est $E^p = \underbrace{E \times \ldots \times E}_{p \text{ fois}}$.
Donc, d'après la Proposition 4, le nombre de p-listes de E est card$(E^p) = (\text{card } E)^p = n^p$.

■

CAPACITÉ EXIGIBLE 3 :

Choix SUCCESSIFS de p éléments parmi n éléments, avec RÉPÉTITIONS POSSIBLES.

Soit une p-liste quelconque $(x_1, \ldots, x_p)$ d'un ensemble E à n éléments.
Connaître le nombre de p-listes de E revient à calculer le nombre de choix pour $(x_1, \ldots, x_p)$.
Ici, il y a un $\boxed{\text{ordre}}$ et les x_i ne sont pas forcément distinctes, donc $\boxed{\text{répétitions possibles}}$: choisir $(x_1, \ldots, x_p)$ revient à choisir x_1 PUIS x_2 ... PUIS x_p:
$\rightarrow$ nb de choix pour x_1:

$\rightarrow$ nb de choix pour x_2:

$\vdots$

$\rightarrow$ nb de choix pour x_p:

Conclusion: Il y a façons de choisir $(x_1, \ldots, x_p)$, donc le nombre de p-listes de E est ...

Exemple 3 On compose au hasard un numéro de téléphone. Calculer:
(1) le nombre de numéros possibles.
(2) Le nombre de numéros terminant par 26.

Conclusion: Dès que les notions ORDRE et RÉPÉTITIONS POSSIBLES sont couplées, on dénombre des p-listes (donc résultats sous la forme n^p, où p est le nombre de cases et n est le nombre de choix par case):
- construire des mots,
- codes d'accès,
- tirages (cartes, boules, etc ...) **successifs** (= ordre) et **avec remise** (= répétitions possibles),
- A compléter ...

Corollaire 2 *Soient E et F deux ensembles finis: card $E = p$ et card $F = n$.*
Alors l'ensemble des applications de E dans F (F^E) est fini et le nombre d'applications de E dans F est:

$$card(F^E) = (card\ F)^{card\ E} = n^p.$$

Preuve: Soit f une application de E dans F. Posons $E = \{x_1, \dots, x_p\}$ (puisque E contient p éléments).
Se donner f revient à se donner $\underbrace{(f(x_1), \dots, f(x_p))}_{p\text{-liste de } F \text{ à } n \text{ éléments}}$ où $\forall i \in [|1,p|]$, $f(x_i) \in F$.
Donc, par le Théorème 1, il y a n^p façons de choisir f.

■

2.2 Nombre d'injections

Définition 3 *Soit un ensemble E.*
Un p**-arrangement** *de E est une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts: $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, où $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.*
Autrement dit: un p-arrangement de E est une p**-liste de** E **sans répétition.**

Exemple 4 $(1, 2, 3)$ est un 3-arrangement de $\mathbb{N}$, mais pas $(1, 1, 3)$.

Théorème 2 *Le nombre de p-arrangements d'un ensemble fini à n éléments est noté A_n^p et vaut:*

$$\boxed{A_n^p = \begin{array}{|cc} n\,(n-1)\dots(n-p+1) & si\ p \leqslant n \\ 0 & si\ p > n \end{array}}$$

Preuve:
Soit E un ensemble à n éléments.
Si $p > n$:

Si $p \leqslant n$:
soit $(x_1, \dots, x_p)$ un p-arrangement de E. Calculons le nombre de façons de choisir $(x_1, \dots, x_p)$, ce qui revient à calculer A_n^p.
Ici, il y a un $\boxed{\text{ordre}}$ et les x_i sont tous distincts, donc $\boxed{\text{aucune répétition}}$: choisir $(x_1, \dots, x_p)$ revient à choisir x_1 PUIS x_2 ... PUIS x_p:
→ nb de choix pour x_1:

→ nb de choix pour x_2:

→ nb de choix pour x_3:

⋮

→ nb de choix pour x_p:

Conclusion: il y a façons de choisir $(x_1, \dots, x_p)$, donc le nombre de p-arrangements de E est ...

■

CAPACITÉ EXIGIBLE 4 :

Choix SUCCESSIFS de p éléments parmi n éléments, SANS RÉPÉTITIONS.

Exemple 5 Lors d'une course hippique, 15 chevaux sont en compétition. Donner le nombre de paris possibles au tiercé.

Dès que les notions ORDRE et AUCUNE RÉPÉTITION sont couplées, on dénombre des p-arrangements (donc résultats sous la forme A_n^p, où p est le nombre de cases et n est le nombre de choix pour la première case):
- courses hippiques, courses d'athlétisme, ...
- élections,
- tirages (cartes, boules, etc ...) **successifs** (= ordre) et **sans remise** (= répétitions impossibles),
- A compléter ...

Remarque 3 On peut réécrire A_n^p pour $p \leqslant n$:

Donc: $\boxed{\forall p \leqslant n,\ A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$

Remarque 4 : astuce pour écrire A_n^p.
n est le premier terme du produit et p est le nombre de termes du produit.
En effet, entre n et $n-p+1$, il y a $n-(n-p+1)+1 = p$ termes.
Exemple: pour A_{15}^3, le produit aura trois termes, dont le premier est 15, d'où $A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13$.

Corollaire 3 *Soient E et F deux ensembles finis: card $E = p$ et card $F = n$.*
Le nombre d'applications injectives de E dans F est A_n^p.

Preuve: Posons $E = \{x_1, \ldots, x_p\}$ (où les $x_1, \ldots, x_p$ sont deux à deux distincts).
Se donner une application injective f de E dans F revient à se donner un p-arrangement $(f(x_1), \ldots, f(x_p))$ où $\forall i \in [|1,p|]$, $f(x_i) \in F$.
En effet, par injection, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, donc f est injective ssi les éléments de $(f(x_1), \ldots, f(x_p))$ sont deux à deux distincts.
Donc, par le Théorème 2, il y a A_n^p façons de choisir f.

■

2.3 Nombre de bijections

2.3.1 Bijection et cardinal

Théorème 3 *Soient E et F deux ensembles finis.*
card(E) =card(F) ssi il existe une bijection entre E et F.

Preuve:

■

2.3.2 Nombre de permutations

Définition 4 *Soit un ensemble E. Une* **permutation** *de E est une liste de E contenant exactement une fois chaque élément de E.*

Théorème 4 *Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$.*

Preuve : Soit E un ensemble à n éléments.
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une permutation de E. C'est une **n-liste de E sans répétition**, donc $A_n^n = n!$ choix.

■

CAPACITÉ EXIGIBLE 5 :

Choix SUCCESSIFS de TOUS les éléments d'un ensemble à n éléments, SANS RÉPÉTITIONS.

Exemple 6 Lors d'un dîner entre amis, il y a 4 personnes à placer autour d'une table entourée de 4 chaises. Combien y a-t-il de façons pour placer les gens?

3 Dénombrement des parties (choix simultané)

(Dans toute cette partie, l'ORDRE des éléments choisis n'a aucune importance)

3.1 Parties à p éléments (combinaisons)

3.1.1 Définition

Définition 5 *Soit E un ensemble fini.*
On appelle **combinaison** *à p éléments de E, ou* **p-combinaison de** *E, toute partie de E contenant p éléments.*
On peut noter $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des combinaisons à p éléments de E.

Exemple 7 Considérons l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$.
- Combinaisons à 0 éléments de E: $\emptyset$.
- Combinaisons à 1 élément de E: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$.
- Combinaisons à 2 éléments de E: $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}$.
- Combinaisons à 3 éléments de E: $\{1, 2, 3\}$.

Remarque 5 :
(1) Evidemment, $0 \leqslant p \leqslant \text{card } E$.
(2) Ici, **l'ordre n' a aucune importance**: les éléments d'une combinaison sont choisis **simultanément** (ou en paquet) parmi ceux de E. $\boxed{\text{ils sont donc tous distincts deux à deux!}}$

Théorème 5 *Le nombre de combinaisons à p éléments d'un ensemble à n éléments est égal à $\binom{n}{p}$, soit:*

$$\boxed{\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right) = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} & si\ p \leqslant n \\ 0 & si\ p > n \end{cases}}$$

Preuve:
• si $p > n$:

• si $p \leqslant n$:
former un p-arrangement $(x_1, \ldots, x_p)$ de E (il y en a A_n^p) revient à choisir p éléments parmi n, qui sont bien deux à deux distincts, mais ils sont ordonnés.
Comme il y a $p!$ ordres différents possibles, le nombre de combinaisons $\{x_1, \ldots, x_p\}$ de E est donc:
$\text{card}\mathcal{P}_p(E) = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} = \dbinom{n}{p}$.

$\blacksquare$

Exemple 8 Reprise de l'exemple 2: $\boxed{\text{CALCULS}}$

3.1.2 Vision ensembliste des propriétés des coefficients binômiaux

Rappel 1 $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}}$

En effet:

il a ...... partie à 0 éléments d'un ensemble à n éléments, c'est . Donc $\binom{n}{0} = \ldots$.

De même, il a ...... partie à n éléments d'un ensemble à n éléments, c'est . Donc $\binom{n}{n} = \ldots$.

***Proposition 5* :**

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \leqslant n,\ \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Preuve: (Méthode du double décompte)

Dénombrons de deux façons differentes le nombre de parties à p éléments de E, ensemble à n éléments.

Façon 1: c'est le Théorème 5, il y en a ....

Façon 2: choisir A revient à choisir ......, donc on dénombre les parties de E à ...... éléments. Donc il y en a ......

Conclusion: $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

$\blacksquare$

***Proposition 6* : Formule du chef**

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,$ *tels que* $p \leqslant n,\ \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$

Preuve: (Méthode du double décompte)

Dénombrons de deux façons differentes le nombre de parties à p éléments de E (ensemble à n éléments) ayant un chef.

Façon 1: on choisit les p éléments puis le chef parmi ces p éléments.

Façon 2: on choisit le chef dans les n éléments de E puis les $p-1$ éléments restants.

$\blacksquare$

***Proposition 7* : Triangle de Pascal**

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \leqslant n,\ \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Preuve: (Méthode du double décompte)
Dénombrons de deux façons différentes le nombre de parties à $p+1$ éléments de E, ensemble à $n+1$ éléments.

Façon 1: c'est le Théorème 5, il y en a ......
Façon 2: soit a un élément de E.
Pour toute partie A à $(p+1)$ éléments de E, soit $a \in A$, soit $a \notin A$.
$\boxed{\text{ENSEMBLES}}$

Notant $\mathcal{P}_{p+1}(E)$ l'ensemble des parties de E à $(p+1)$ éléments, on obtient donc la partition suivante:
$\mathcal{P}_{p+1}(E) = \ldots\ldots$

$\boxed{\text{FORMULE}}$

$\boxed{\text{CALCULS}}$

$$\textit{Conclusion:}\ \text{card}\ \mathcal{P}_{p+1}(E) \underset{\text{façon 1}}{=} \binom{n+1}{p+1} \underset{\text{façon 2}}{=} \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

■

3.2 Parties d'un ensemble fini

Théorème 6 *Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n, soit card$(\mathcal{P}(E)) = 2^n$, où E est un ensemble tel que card$(E) = n$.*

Preuve: Soit E un ensemble à n éléments.
Pour toute partie A de E: **soit** A a 0 éléments, **soit** A a 1 élément, **soit** ... **soit** A a n éléments.
$\boxed{\text{ENSEMBLES}}$
On obtient donc une partition de $\mathcal{P}(E)$ de la façon suivante: notant $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E *à k éléments*, $k \in [|0,n|]$, la famille $(\mathcal{P}_k(E))_{k\in[|0,n|]}$ forme une partition de $\mathcal{P}(E)$, donc
$\boxed{\text{FORMULE}}$

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \text{card}(\mathcal{P}_k(E))$$

$\boxed{\text{CALCULS}}$

■