

# Dénombrément

BCPST 1C – Mme MOREL

## 1 Ensembles finis (cardinaux)

### 1.1 Définition

**Définition 1 :**

$E$  est un ensemble **fini** s'il est vide (ne contient aucun élément) ou s'il possède un nombre fini d'éléments (deux à deux distincts).

On appelle **cardinal de**  $E$ , et on note  $\text{card}(E)$ , le nombre d'éléments de  $E$ .

Déterminer le cardinal d'un ensemble fini  $E$ , c'est **dénombrer**  $E$ .

**Exemple 1**  $\text{card } \emptyset = 0$ ;  $E = \{1, 2, 3\}$ .  $E$  est fini et  $\text{card}(E) = 3$ .

### 1.2 Cardinal d'une réunion

**Proposition 1 (admise):**

(1) Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis, alors  $E \cup F$  est finie et:

$$\boxed{\text{card}(E \cup F) = \text{card } E + \text{card } F - \text{card}(E \cap F)} \quad \text{Formulaire de Poincaré}$$

En particulier, si  $E$  et  $F$  sont **disjoints**,  $\text{card}(E \cup F) = \text{card } E + \text{card } F$ .

(2) Soient  $E, F, G$  trois ensembles finis, alors  $E \cup F \cup G$  est finie et:

$$\boxed{\text{card}(E \cup F \cup G) = \text{card } E + \text{card } F + \text{card } G - [\text{card}(E \cap F) + \text{card}(E \cap G) + \text{card}(F \cap G)] + \text{card}(E \cap F \cap G)}$$

"Patates":

(1) On compte deux fois  $\text{card}(E \cap F)$ :

(2) On compte deux fois  $\text{card}(E \cap F)$ ,  $\text{card}(E \cap G)$  et  $\text{card}(F \cap G)$ , et on compte trois fois  $\text{card}(E \cap F \cap G)$ :

**Remarque 1** Le cardinal de l'union se généralise à  $n$  ensembles finis, mais la formule (**formule du crible**) est très difficile à écrire.

En revanche, si les ensembles sont **disjoints deux à deux**:

**Corollaire 1** Soient  $E_1, \dots, E_n$ ,  $n$  ensembles finis deux à deux disjoints, alors:

$$\text{card} (E_1 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{k=1}^n \text{card} E_k$$

**CAPACITÉ EXIGIBLE 1 : Dénombrement par disjonction de cas (partition ou système complet):**

Dans la formule du crible, le OU est inclusif, tandis que dans la formule du Corollaire, le OU est exclusif.

Donc, pour dénombrer un ensemble, on sera souvent amené à le “découper” en plusieurs sous-ensembles deux à deux disjoints (faire des cas: **soit ... soit ...**), pour ensuite sommer les cardinaux de ces sous-ensembles.

**Exemple 2** Dans un jeu de 32 cartes, on tire 5 cartes simultanément. Dénombrer les mains ayant au moins un as.

Etape 1: **ENSEMBLES**

Soit  $A = \{ \text{mains ayant au moins un as} \}$ . On cherche  $\text{card}(A)$ .

(ATTENTION! Ne pas confondre ensemble et cardinal: écrire  $A = \{ \text{nombre de mains ayant au moins un as} \}$  est faux...)

Etape 2: **FORMULE**

Etape 3: **CALCULS** (cf Parties 2. et 3.)

### 1.3 Cardinal d'une partie

**Proposition 2** Soit  $E$  un ensemble fini et  $A, B$  deux parties de  $E$ . Alors:

- (1)  $\text{card} (E \setminus A) = \text{card} E - \text{card} A$ .
- (2)  $\text{card} (B \setminus A) = \text{card} B - \text{card} (A \cap B)$ .

**Preuve:** On applique la formule de Poincaré aux ensembles disjoints suivants:

- (1)  $E = A$  et  $F = E \setminus A$ , de réunion  $E$ .
- (2)  $E = B \setminus A$  et  $F = B \cap A$ , de réunion  $B$ .

■

**CAPACITÉ EXIGIBLE 2 : dénombrement en utilisant le complémentaire:**

Il faut surtout penser à cette méthode quand elle évite de faire une partition ou un système complet.

**Reprise de l'exemple 2:**

**ENSEMBLES**

Si on considère plutôt  $E = \{ \text{mains possibles} \}$  et  $E \setminus A = \{ \hspace{15em} \}$ , alors:

**FORMULE**

**CALCULS** Il y a donc moins de calculs à faire qu'en passant par une partition...!

**Proposition 3** Soit  $E$  un ensemble fini. Alors:

toute partie  $A$  de  $E$  est finie et  $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$ , avec le cas d'égalité:  $A = E \iff \text{card}(A) = \text{card}(E)$ .

**Preuve:**

■

**POINT METHODE 1 : Egalité de deux ensembles FINIS:**

D'après le cours de Logique, on démontre que deux ensembles sont égaux ( $E = F$ ) par double inclusion:  $E \subset F$  et  $F \subset E$ . Quand les ensembles sont FINIS, il suffit de montrer une des deux inclusions (on montre la plus simple en général) et de montrer que les cardinaux sont égaux.

(Méthode à retenir pour l'algèbre linéaire, dans le cas d'espaces vectoriels de dimension FINIE.)

## 1.4 Cardinal d'un produit cartésien

**Proposition 4 (admise):** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis.

Alors leur produit cartésien  $E \times F$  est fini et:  $\boxed{\text{card } E \times F = \text{card } E \times \text{card } F}$

**Remarque 2 :**

(1) Pour bien comprendre cette formule, on peut considérer un tableau à deux entrées:

| $E \setminus F$ | 0      | 1      | 2      |
|-----------------|--------|--------|--------|
| 1               | (1, 0) | (1, 1) | (1, 2) |
| 2               | (2, 0) | (2, 1) | (2, 2) |

(2) ATTENTION!! Dans cette formule le signe  $\times$  n'est pas le même!

dans  $E \times F$ : il s'agit du signe du produit cartésien, qui se lit "croix",

dans  $\text{card } E \times \text{card } F$ : il s'agit du signe "multiplier" chez les réels, qui se lit "fois".

(3) Généralisation (par récurrence) à  $n$  ensembles  $E_1 \times \dots \times E_n$ :  $\text{card } (E_1 \times \dots \times E_n) = \text{card } E_1 \times \dots \times \text{card } E_n$ .

En particulier,  $\boxed{\text{card } (E^n) = (\text{card } E)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*}$

## 2 Dénombrement des applications (choix successifs)

(La notion d'ORDRE dans ce paragraphe est primordiale: l'ordre des éléments compte)

### 2.1 Nombre d'applications

**Définition 2** Soit  $E$  un ensemble.

Une  $p$ -liste de  $E$  est un élément de  $E^p$  (ou  $p$ -uplet d'éléments de  $E$ ):  $(x_1, \dots, x_p)$  où  $x_i \in E \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

**Théorème 1** Le nombre de  $p$ -listes d'un ensemble à  $n$  éléments est  $n^p$ .

**Preuve:** Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments, soit  $\text{card}(E) = n$ . Par définition du produit cartésien, l'ensemble de toutes les  $p$ -listes de  $E$  est  $E^p = \underbrace{E \times \dots \times E}_{p \text{ fois}}$ .

Donc, d'après la Proposition 4, le nombre de  $p$ -listes de  $E$  est  $\text{card}(E^p) = (\text{card } E)^p = n^p$ . ■

### CAPACITÉ EXIGIBLE 3 :

**Choix SUCCESSIFS de  $p$  éléments parmi  $n$  éléments, avec RÉPÉTITIONS POSSIBLES.**

Soit une  $p$ -liste quelconque  $(x_1, \dots, x_p)$  d'un ensemble  $E$  à  $n$  éléments.

Connaître le nombre de  $p$ -listes de  $E$  revient à calculer le nombre de choix pour  $(x_1, \dots, x_p)$ .

Ici, il y a un  $\boxed{\text{ordre}}$  et les  $x_i$  ne sont pas forcément distinctes, donc  $\boxed{\text{répétitions possibles}}$ : choisir  $(x_1, \dots, x_p)$  revient à choisir  $x_1$  PUIS  $x_2$  ... PUIS  $x_p$ :

→ nb de choix pour  $x_1$ :

→ nb de choix pour  $x_2$ :

⋮

→ nb de choix pour  $x_p$ :

Conclusion: Il y a

façons de choisir  $(x_1, \dots, x_p)$ , donc le nombre de  $p$ -listes de  $E$  est ...

**Exemple 3** On compose au hasard un numéro de téléphone. Calculer:

(1) le nombre de numéros possibles.

(2) Le nombre de numéros terminant par 26.

Conclusion: Dès que les notions ORDRE et RÉPÉTITIONS POSSIBLES sont couplées, on dénombre des  $p$ -listes (donc résultats sous la forme  $n^p$ , où  $p$  est le nombre de cases et  $n$  est le nombre de choix par case):

- construire des mots,
- codes d'accès,
- tirages (cartes, boules, etc ...) **successifs** (= ordre) et **avec remise** (= répétitions possibles),
- A compléter ...

**Corollaire 2** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis:  $\text{card } E = p$  et  $\text{card } F = n$ .

Alors l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$  ( $F^E$ ) est fini et le nombre d'applications de  $E$  dans  $F$  est:

$$\text{card}(F^E) = (\text{card } F)^{\text{card } E} = n^p.$$

**Preuve:** Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . Posons  $E = \{x_1, \dots, x_p\}$  (puisque  $E$  contient  $p$  éléments).

Se donner  $f$  revient à se donner  $(f(x_1), \dots, f(x_p))$  où  $\forall i \in [1, p], f(x_i) \in F$ .

$p$ -liste de  $F$  à  $n$  éléments

Donc, par le Théorème 1, il y a  $n^p$  façons de choisir  $f$ . ■

## 2.2 Nombre d'injections

**Définition 3** Soit un ensemble  $E$ .

Un  **$p$ -arrangement** de  $E$  est une  $p$ -liste d'éléments de  $E$  deux à deux distincts:  $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ , où  $x_i \neq x_j$  si  $i \neq j$ .

Autrement dit: un  $p$ -arrangement de  $E$  est une  $p$ -liste de  $E$  sans répétition.

**Exemple 4**  $(1, 2, 3)$  est un 3-arrangement de  $\mathbb{N}$ , mais pas  $(1, 1, 3)$ .

**Théorème 2** Le nombre de  $p$ -arrangements d'un ensemble fini à  $n$  éléments est noté  $A_n^p$  et vaut:

|           |                        |                       |
|-----------|------------------------|-----------------------|
| $A_n^p =$ | $n(n-1) \dots (n-p+1)$ | $\text{si } p \leq n$ |
|           | $0$                    | $\text{si } p > n$    |

**Preuve:**

Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments.

Si  $p > n$ :

Si  $p \leq n$ :

soit  $(x_1, \dots, x_p)$  un  $p$ -arrangement de  $E$ . Calculons le nombre de façons de choisir  $(x_1, \dots, x_p)$ , ce qui revient à calculer  $A_n^p$ .

Ici, il y a un ordre et les  $x_i$  sont tous distincts, donc aucune répétition: choisir  $(x_1, \dots, x_p)$  revient à choisir  $x_1$  PUIS  $x_2$

... PUIS  $x_p$ :

→ nb de choix pour  $x_1$ :

→ nb de choix pour  $x_2$ :

→ nb de choix pour  $x_3$ :

⋮

→ nb de choix pour  $x_p$ :

Conclusion: il y a  $n(n-1) \dots (n-p+1)$  façons de choisir  $(x_1, \dots, x_p)$ , donc le nombre de  $p$ -arrangements de  $E$  est ... ■

### CAPACITÉ EXIGIBLE 4 :

**Choix SUCCESSIFS de  $p$  éléments parmi  $n$  éléments, SANS RÉPÉTITIONS.**

**Exemple 5** Lors d'une course hippique, 15 chevaux sont en compétition. Donner le nombre de paris possibles au tiercé.

Dès que les notions ORDRE et AUCUNE RÉPÉTITION sont couplées, on dénombre des  $p$ -arrangements (donc résultats sous la forme  $A_n^p$ , où  $p$  est le nombre de cases et  $n$  est le nombre de choix pour la première case):

- courses hippiques, courses d'athlétisme, ...
- élections,
- tirages (cartes, boules, etc ...) **successifs** (= ordre) et **sans remise** (= répétitions impossibles),
- A compléter ...

**Remarque 3** On peut réécrire  $A_n^p$  pour  $p \leq n$ :

Donc: 
$$\forall p \leq n, A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

**Remarque 4 : astuce pour écrire  $A_n^p$ .**

$n$  est le premier terme du produit et  $p$  est le nombre de termes du produit.

En effet, entre  $n$  et  $n - p + 1$ , il y a  $n - (n - p + 1) + 1 = p$  termes.

Exemple: pour  $A_{15}^3$ , le produit aura trois termes, dont le premier est 15, d'où  $A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13$ .

**Corollaire 3** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis:  $\text{card } E = p$  et  $\text{card } F = n$ .

Le nombre d'applications injectives de  $E$  dans  $F$  est  $A_n^p$ .

**Preuve:** Posons  $E = \{x_1, \dots, x_p\}$  (où les  $x_1, \dots, x_p$  sont deux à deux distincts).

Se donner une application injective  $f$  de  $E$  dans  $F$  revient à se donner un  $p$ -arrangement  $(f(x_1), \dots, f(x_p))$  où  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $f(x_i) \in F$ .

En effet, par injection,  $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ , donc  $f$  est injective ssi les éléments de  $(f(x_1), \dots, f(x_p))$  sont deux à deux distincts.

Donc, par le Théorème 2, il y a  $A_n^p$  façons de choisir  $f$ .

■

## 2.3 Nombre de bijections

### 2.3.1 Bijection et cardinal

**Théorème 3** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis.

$\text{card}(E) = \text{card}(F)$  ssi il existe une bijection entre  $E$  et  $F$ .

**Preuve:**

### 2.3.2 Nombre de permutations

**Définition 4** Soit un ensemble  $E$ . Une **permutation** de  $E$  est une liste de  $E$  contenant exactement une fois chaque élément de  $E$ .

**Théorème 4** Le nombre de permutations d'un ensemble à  $n$  éléments est  $n!$ .

**Preuve :** Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments.

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une permutation de  $E$ . C'est une  $n$ -liste de  $E$  **sans répétition**, donc  $A_n^n = n!$  choix.

### CAPACITÉ EXIGIBLE 5 :

Choix **SUCCESSIFS** de **TOUS** les éléments d'un ensemble à  $n$  éléments, **SANS RÉPÉTITIONS**.

**Exemple 6** Lors d'un dîner entre amis, il y a 4 personnes à placer autour d'une table entourée de 4 chaises. Combien y a-t-il de façons pour placer les gens?

## 3 Dénombrement des parties (choix simultané)

(Dans toute cette partie, l'ORDRE des éléments choisis n'a aucune importance)

### 3.1 Parties à $p$ éléments (combinaisons)

#### 3.1.1 Définition

**Définition 5** Soit  $E$  un ensemble fini.

On appelle **combinaison** à  $p$  éléments de  $E$ , ou  **$p$ -combinaison de  $E$** , toute partie de  $E$  contenant  $p$  éléments.

On peut noter  $\mathcal{P}_p(E)$  l'ensemble des combinaisons à  $p$  éléments de  $E$ .

**Exemple 7** Considérons l'ensemble  $E = \{1, 2, 3\}$ .

- Combinaisons à 0 éléments de  $E$ :  $\emptyset$ .
- Combinaisons à 1 élément de  $E$ :  $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ .
- Combinaisons à 2 éléments de  $E$ :  $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}$ .
- Combinaisons à 3 éléments de  $E$ :  $\{1, 2, 3\}$ .

**Remarque 5 :**

(1) Evidemment,  $0 \leq p \leq \text{card } E$ .

(2) Ici, **l'ordre n' a aucune importance**: les éléments d'une combinaison sont choisis **simultanément** (ou en paquet) parmi ceux de  $E$ . ils sont donc tous distincts deux à deux!

**Théorème 5** Le nombre de combinaisons à  $p$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments est égal à  $\binom{n}{p}$ , soit:

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

**Preuve:**

• si  $p > n$ :

• si  $p \leq n$ :

former un  $p$ -arrangement  $(x_1, \dots, x_p)$  de  $E$  (il y en a  $A_n^p$ ) revient à choisir  $p$  éléments parmi  $n$ , qui sont bien deux à deux distincts, mais ils sont ordonnés.

Comme il y a  $p!$  ordres différents possibles, le nombre de combinaisons  $\{x_1, \dots, x_p\}$  de  $E$  est donc:

$$\text{card} \mathcal{P}_p(E) = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.$$

**Exemple 8 Reprise de l'exemple 2:** CALCULS

**3.1.2 Vision ensembliste des propriétés des coefficients binômiaux**

**Rappel 1**  $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

En effet:

il a ..... partie à 0 éléments d'un ensemble à  $n$  éléments, c'est ..... . Donc  $\binom{n}{0} = \dots$

De même, il a ..... partie à  $n$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments, c'est ..... . Donc  $\binom{n}{n} = \dots$

**Proposition 5 :**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \leq n, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

**Preuve:** (Méthode du double décompte)

Dénombrons de deux façons différentes le nombre de parties à  $p$  éléments de  $E$ , ensemble à  $n$  éléments.

*Façon 1:* c'est le Théorème 5, il y en a ....

*Façon 2:* choisir  $A$  revient à choisir ....., donc on dénombre les parties de  $E$  à ..... éléments. Donc il y en a .....

*Conclusion:*  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ .

**Proposition 6 : Formule du chef**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, \text{ tels que } p \leq n, \binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$$

**Preuve:** (Méthode du double décompte)

Dénombrons de deux façons différentes le nombre de parties à  $p$  éléments de  $E$  (ensemble à  $n$  éléments) ayant un chef.

*Façon 1:* on choisit les  $p$  éléments puis le chef parmi ces  $p$  éléments.

*Façon 2:* on choisit le chef dans les  $n$  éléments de  $E$  puis les  $p - 1$  éléments restants.

**Proposition 7 : Triangle de Pascal**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \leq n, \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

**Preuve:** (Méthode du double décompte)

Dénombrons de deux façons différentes le nombre de parties à  $p + 1$  éléments de  $E$ , ensemble à  $n + 1$  éléments.

*Façon 1:* c'est le Théorème 5, il y en a .....

*Façon 2:* soit  $a$  un élément de  $E$ .

Pour toute partie  $A$  à  $(p + 1)$  éléments de  $E$ , soit  $a \in A$ , soit  $a \notin A$ .

ENSEMBLES

Notant  $\mathcal{P}_{p+1}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$  à  $(p + 1)$  éléments, on obtient donc la partition suivante:  
 $\mathcal{P}_{p+1}(E) = \dots\dots$

FORMULE

CALCULS

$$\text{Conclusion: } \text{card } \mathcal{P}_{p+1}(E) \underset{\text{façon 1}}{=} \binom{n+1}{p+1} \underset{\text{façon 2}}{=} \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

■

### 3.2 Parties d'un ensemble fini

**Théorème 6** Le nombre de parties d'un ensemble à  $n$  éléments est  $2^n$ , soit  $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ , où  $E$  est un ensemble tel que  $\text{card}(E) = n$ .

**Preuve:** Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments.

Pour toute partie  $A$  de  $E$ : **soit**  $A$  a 0 éléments, **soit**  $A$  a 1 élément, **soit** ... **soit**  $A$  a  $n$  éléments.

ENSEMBLES

On obtient donc une partition de  $\mathcal{P}(E)$  de la façon suivante: notant  $\mathcal{P}_k(E)$  l'ensemble des parties de  $E$  à  $k$  éléments,  $k \in [0, n]$ , la famille  $(\mathcal{P}_k(E))_{k \in [0, n]}$  forme une partition de  $\mathcal{P}(E)$ , donc

FORMULE

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^n \text{card}(\mathcal{P}_k(E))$$

CALCULS

■