Espaces probabilisés finis

BCPST 1C – Mme MOREL

Introduction

On effectue une expérience dont on ne peut prévoir de manière certaine le résultat car il dépend du hasard.
Comme il y a un aléas, on dit que l'expérience est *aléatoire*.

Expérience 1: On lance un dé et on relève le numéro de la face obtenue.
Les résultats possibles de cette expérience aléatoire sont: $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Définition 1 *L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé* **univers** *et noté* $\boxed{\Omega}$

Expérience 1: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et card $\Omega = 6$: l'univers est fini.
Dans tout ce chapitre, $\boxed{\Omega \text{ est fini}}$, soit: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, où card $\Omega = n \in \mathbb{N}^*$.

1 Evénements

1.1 Définition

Lors d'une expérience aléatoire, un résultat peut se réaliser ou pas: on l'appelle **événement**.

Expérience 1. Soient les événements $A_k =$" le numéro k sort ", $B =$" le numéro obtenu est pair " et $C =$" on obtient un multiple de 3 ".
B est réalisé ssi on obtient 2, 4 ou 6. En maths: $B = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$.
De même, C est réalise ssi on obtient 3 ou 6, donc on écrit: $C = \{3, 6\} \subset \Omega$.
De même, $A_1 = \{1\}$.

Ainsi, on identifie un événement à une partie de Ω:

$$\boxed{\mathcal{P}(\Omega) \text{ est l'ensemble des événements de l'expérience aléatoire d'univers } \Omega}$$

Vocabulaire:
(1) **Expérience 1.** Soit $C =$" On obtient un numéro entre 1 et 6". C est un événement toujours réalisé, $C = \Omega$!!
Ω est appelé **événement certain**.
(2) **Expérience 1.** Soit $D =$ "le numéro 0 sort ". D est un événement jamais réalisé. On dit que D est un **événement impossible**.
On note en général tout événement impossible par $\emptyset$.
(3) **Expérience 1.** A_1 ne contient qu'un seul élément de Ω ($A_1 = \{1\}$): on dit que A_1 est un **événement élémentaire** de Ω.
Plus généralement: Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ alors $\forall i \in [|1, n|]$, $\{\omega_i\}$ est un **événement élémentaire** de Ω.

1.2 Opérations et vocabulaire

Puisqu'un événement est une partie de Ω, toutes les opérations vues au chapitre 3 s'appliquent (lois de Morgan, calcul de cardinaux, ...). Seul le vocabulaire s'ajoute (interprétation probabiliste du chapitre 3):
Soient A, B deux événements de Ω ($A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$).

- $A \cap B$: les événements A et B sont réalisés simultanément.
- $A \cup B$: A est réalisé OU B est réalisé (ou INCLUSIF).

Pour le ou EXCUSIF (SOIT A est réalisé SOIT B est réalisé): $A \cap B = \emptyset$: on ne dit plus disjoints mais **incompatibles**.

- $A \subset B$: si A est réalisé alors B est réalisé.
- $\overline{A} = \Omega \setminus A$: **événement contraire de** A (on ne dit plus complémentaire).

1.3 Système complet d'événements

Expérience 1. Le numéro obtenu est **soit** pair **soit** impair, c'est-à-dire: B et $\overline{B}$ forment une partition de Ω, ils vérifient:
$*$ $B \cup \overline{B} = \Omega$
$*$ B et $\overline{B}$ sont incompatibles ($B \cap \overline{B} = \emptyset$)
($*$ $B \neq \emptyset$ et $\overline{B} \neq \emptyset$: n'apparaît plus dans la notion de système complet d'événements).

Exemple 1 $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Considérons les événements élémentaires $\{\omega_i\}$, $i = 1, \ldots, n$:
$*$ Ils sont incompatibles deux à deux: $\forall i \neq j$, $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \emptyset$.
$*$ $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\} = \Omega$.
$*$ Ils sont tous non vides: $\forall i$, $\{\omega_i\} \neq \emptyset$: : n'apparaît plus dans la notion de système complet d'événements.
Conclusion: les événements élémentaires forment une partition (un système complet d'événements) de Ω.

Définition 2 *Soit Ω un univers fini et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements.*
Soit $A_1, \ldots, A_n$ une famille d'événements de Ω. On dit que cette famille est un **système complet d'événements** *si:*
$*$ *ils sont deux à deux incompatibles: $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.*
$*$ $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

2 Probabilité

2.1 Espaces probabilisables

Expérience 1. $B =$" On obtient un numéro pair ".
Il y a 3 chances sur 6, ou 1 chance sur 2, ou 50% de chances d'obtenir un numéro pair, c'est-à-dire que B soit réalisé.
Il y a 1 chance sur 6 d'obtenir le numéro 1, c'est-à-dire que A_1 soit réalisé.

Plus généralement: à chaque événement A d'un univers Ω, on associe un nombre $P(A)$, sa *probabilité*, qui mesure " les chances " qu'a cet événement pour être réalisé: $P(A)$ mesure donc la vraissemblance de A.
Comment attribuer à un événement une mesure de sa fréquence d'apparition? C'est l'objectif de cette partie.

Définition 3 *Soit Ω un ensemble FINI non vide. On dit que le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un* **espace probabilisable** *(qu'on peut munir d'une probabilité).*
Ω est appelé **univers** *et les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont les* **événements**.

2.2 Définition et propriétés

Définition 4 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.*
On appelle **probabilité** *sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$ vérifiant:*
(1) $P(\Omega) = 1$.
(2) $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, tels que $A \cap B = \emptyset$ (A et B sont deux événements incompatibles de Ω), $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A)$ s'appelle la **probabilité de l'(événement)** *A.*
Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est appelé **espace probabilisé** *FINI.*

Explications:
• P est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ car on ne peut pas avoir un nombre de chances négatif!!! Donc:

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) \geqslant 0}$$

On ne laisse pas une probabilité négative sur une copie!!!!
• (1): Puisque Ω est un événement certain, il est sûr d'être réalisé, il y a donc 100% de chances que Ω soit réalisé: $P(\Omega) = 1$.
• (2) A et B étant incompatibles, ils ne peuvent être réalisés en même temps, donc $A \cup B$ est réalisé ssi SOIT A est réalisé SOIT B est réalisé.
On additionne donc les nombres de chances de réalisation de A et B pour obtenir la vraissemblance de $A \cup B$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple 2 **La Probabilité uniforme**

Définition 5 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.*
On appelle **probabilité uniforme sur** Ω *la probabilité P définie par:*

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \frac{card\, A}{card\, \Omega}}$$

Preuve: Vérifions que P est bien une probabilité:
$*$ $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) \geqslant 0$.
$*$ $P(\Omega) = \ldots$

$*$ $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ incompatibles, $P(A \cup B) = \ldots\ldots$

■

Quand peut-on choisir cette probabilité? Voir plus loin...

Définition 6 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.*
(1) A est dit **quasi-certain** *(ou* **presque-sûr***) si $P(A) = 1$.*
(2) A est dit **quasi-impossible** *(ou* **négligeable***) si $P(A) = 0$.*
(3) Des événements sont dits **équiprobables** *lorsqu'ils ont tous la même probabilité.*

Remarque 1 **ATTENTION!!!** Si Ω est quasi-certain et $\emptyset$ négligeable, ce ne sont pas forcément les seuls!
Contre-exemple: Lors d'un jeu de pile ou face avec une pièce truquée qui donne toujours pile, on a: $P(A) = 1$ et $P(B) = 0$, avec A et B les événements: $A = \{$ obtenir pile$\}$ et $B = \{$ obtenir face$\}$.
Donc A est quasi-certain et B négligeable.

Expérience 1. Si le dé est non pipé, équilibré, alors les événements élémentaires $\{i\}$, $i = 1, \ldots, 6$ sont équiprobables: on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

Remarque 2 Dans le cas de la probabilité uniforme:
si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, on remarque que: $P(\{\omega_i\}) = \dfrac{card\,\{\omega_i\}}{card\,\Omega} = \dfrac{1}{n}$ $\forall i$.
Tous les événements élémentaires sont donc équiprobables.
On verra dans le paragraphe D. que la probabilité uniforme est la *seule* probabilité pour laquelle tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Proposition 1 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements de Ω.*
(1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, donc $P(\emptyset) = 0$.
(2) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$.
En particulier, si $A \subset B$ alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
(3) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$.
(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Remarque 3 $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \geqslant 0$ donc $\boxed{\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) \leqslant 1}$
On ne laisse pas une probabilité strictement supérieure à 1 sur une copie !!!

Preuve:

■

Proposition 2 **(généralisation de (4), ADMISE):**
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A, B, C trois événements de Ω.
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - (P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)) + P(A \cap B \cap C)$.

Remarque 4 La probabilité de l'union se généralise à n événements $A_1, \dots, A_n$ de Ω, mais la formule (formule de Poincaré, formule du Crible) est très difficile à écrire:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k})$$

Par contre:

Proposition 3 **(ADMISE):**
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $A_1, \dots, A_n$ n événements de Ω **deux à deux incompatibles** *($\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$). Alors:*

$$\boxed{P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$$

Corollaire 1 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $A_1, \dots, A_n$ un système complet d'événements de Ω.*
Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1$.

Preuve:

■

2.3 Probabilité et événements élémentaires

Rappel 1 Soit un univers FINI $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Les $\{\omega_i\}$, $i = 1, \dots, n$, sont les événements élémentaires.
SI une probabilité existe sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, alors, notant $P(\{\omega_i\}) = p_i$, on a:

* $\forall i = 1, \dots, n$, $p_i \geqslant 0$ (par définition d'une probabilité).
* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = P(\Omega)$ (les $\{\omega_i\}$ forment un système complet d'événements de Ω). Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

La réciproque est VRAIE: une probabilité sur un espace probabilisé FINI est entièrement déterminée par la connaissance des probabilités des événements élémentaires:

Théorème 1 **(ADMIS):** *Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) un ensemble FINI et $p_1, \dots, p_n$ des réels.*
Il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $P(\{\omega_i\}) = p_i$, $\forall i = 1, \dots, n$ **si et seulement si***:*

$$\forall i \in [|1, n|],\ p_i \geqslant 0 \ \text{et} \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Quand elle existe, la probabilité P est unique et $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\displaystyle P(A) = \sum_{k \,/\, \omega_k \in A} p_k = \sum_{k \,/\, \omega_k \in A} P(\{\omega_k\})$.

Choisir les valeurs des p_i revient à choisir un modèle probabiliste:

2.4 Probabilité uniforme

Expérience 1.
• Le dé étant non truqué, intuitivement, chaque numéro a une chance sur six de sortir. En termes probabilistes, chaque événement élémentaire a autant de chances d'être réalisé qu'un autre:
on dit qu'il y a **équiprobabilité**, chaque événement élémentaire est **équiprobable**.
Autres cas d'équiprobabilité: lancers d'une pièce de monnaie équilibrée ...
• Construction d'une probabilité (c'est là qu'on utilise le sens $\boxed{\Leftarrow}$ du théorème précédent):
On a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On pose $p_i = \dfrac{1}{6}$, $\forall i \in [\![1, 6]\!]$, car d'après l'intuition précédente, on veut $P(\{i\}) = \dfrac{1}{6}$.
Les p_i vérifient: $p_i \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} p_i = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times 6 = 1.$

Conclusion: il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que: $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$, $\forall i = 1, \dots, 6$.
De plus, le théorème précise la probabilité d'un événement. Par exemple, pour $B =$ "un numéro pair sort":
puisque $B = \{2, 4, 6\}$, $P(B) =$

Plus généralement: pour tout événement A de Ω,

$$P(A) = \sum_{k\ /\ k \in A} P(\{k\}) = \dots\dots$$

P est donc la probabilité uniforme!

***Théorème 2* (ADMIS):**
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable FINI, avec card $\Omega = n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
Il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ pour laquelle les événements élémentaires sont équiprobables.
$\forall \omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$ et pour tout événement A de Ω, $\boxed{P(A) = \frac{cardA}{card\Omega}}$
P est appelée la **probabilité uniforme sur Ω**

POINT MÉTHODE 1 :
Dès qu'on est en situation $\boxed{\text{d'équiprobabilité}}$ dans une expérience aléatoire d'univers $\boxed{\text{fini}}$, on munit Ω de la probabilité uniforme (il n'y en a pas d'autres!!)
On est donc ramenés à des problèmes de calcul de cardinaux c'est-à-dire de dénombrement.

Exemple 3 On tire au hasard 3 cartes dans un jeu de 32 cartes.
Calculer la probabilité d'obtenir trois coeurs , au moins un as.

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Définition

Expérience 1. Rappels: $A_2 =$ " on obtient le numéro 2" et $B =$ " on obtient un numéro pair".
On dispose maintenant d'une information supplémentaire: on sait qu'on a obtenu (participe passé: a déjà eu lieu) un numéro pair. Quelle est la probabilité d'obtenir le numéro 2?
Dans ce cas, l'univers change: $\Omega' = \{2, 4, 6\}$, donc la probabilité d'obtenir le numéro 2 **sachant** qu'on a obtenu un numéro pair est $\frac{1}{3}$.
On note $P_B(A_2) = \frac{1}{3}$.
Par ailleurs, $P(A_2 \cap B) = P(A_2) = \frac{1}{6}$ et $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, donc on remarque que:

$$\frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3} = P_B(A_2) \dots$$

Proposition 4 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et A un événement de Ω tel que $P(A) \neq 0$.*
Alors l'application:

$$\begin{array}{rcl} P_A : \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ B & \mapsto & \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{array}$$

est une (nouvelle) probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, appelée **probabilité conditionnelle relative à A**.
$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P_A(B)$ se lit **probabilité de B sachant A**.

Preuve: Vérifions que P_A est bien une probabilité:

■

Remarque 5 :
(1) Autre notation de $P_A(B)$: $P(B|A)$.
Elle est à éviter car prête à confusion: $B|A$ n'est pas un événement!! Un événement conditionnel n'existe pas, il n'y a que des probabilités conditionnelles.
(2) Puisque P_A est une probabilité, elle possède les propriétés énoncées au 2. , soit par exemple:
  $*$ $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.
  $*$ $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$.
(3) Si P est la probabilité uniforme, cela revient à changer d'univers (cf expérience 1.)

3.2 Formules liées au conditionnement

3.2.1 Formule des probabilités composées

La définition de la probabilité conditionnelle relative à A donne: $P(A \cap B) = P(A)\, P_A(B)$.

POINT MÉTHODE 2 :
• La connaissance de $P(A)$ et $P_A(B)$ permet de calculer $P(A \cap B)$: à retenir pour les exercices.
• Généralisation: formule utilisée quand les événements $A_1, \ldots A_n$ représentent des événements *chronologiques, dépendants les uns des autres.*

Théorème 3 **Formule des probabilités composées:**
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $A_1, \ldots, A_n$ n événements de Ω tels que: $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$.
Alors: $\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)}$

Preuve: Toutes les probabilités conditionnelles sont bien définies. En effet:

Produit télescopique:
$P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n) = \ldots\ldots$

■

Expérience 2. Une urne contient trois boules blanches et sept boules noires. On tire successivement 3 boules sans remise de l'urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules blanches?

Remarque 6 On pouvait traiter l'exemple précédent en utilisant la probabilité uniforme: $P(A) = \dfrac{cardA}{card\Omega}$. En effet:

3.2.2 Formule des probabilités totales

Expérience 2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au second tirage?

1. Evénements.
On a besoin de connaître le résultat du premier tirage pour avoir la composition de l'urne au deuxième tirage: le premier tirage a donné SOIT une boule blanche SOIT une boule noire.
On note les événements $N_k = \overline{B_k} =$" obtenir une boule noire au kè tirage ".

ON PEUT UTILISER UNE MODÉLISATION PAR UN ARBRE, MAIS EN AUCUN CAS, IL NE S'AGIRA D'UNE PREUVE SUR UNE COPIE. Il faut donc savoir interpréter un arbre avec la formule probabiliste correspondante:
(1)

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches: $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
(2)

Pour les branches issues d'un même noeud, la somme des probabilités vaut 1: $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$ (avec $P(A) \neq 0$).
(3)

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui le réalisent:
$\boxed{P(B) = P_A(B)\,P(A) + P_{\overline{A}}(B)\,P(\overline{A})}$ (formule des probabilités totales).

1. Retour à l'expérience 2.: B_1 et $N_1 = \overline{B_1}$ forment un système complet d'événements,
2. Formule des probabilités totales:

3. Calculs: $P(N_2) = \ldots$

***Proposition 5* (ADMISE):**
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soit A un événement de Ω tel que $0 < P(A) < 1$.
Alors, $\forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(B) = P_A(B)\,P(A) + P_{\overline{A}}(B)\,P(\overline{A})$.

Généralisation:

***Théorème 4* Formule des probabilités totales:**
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements.
Alors, $\forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\boxed{P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k)}$
Si de plus, $\forall i \in [|1, n|]$, $P(A_i) \neq 0$.
Alors, $\forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\boxed{P(B) = \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)\,P(A_k) \ \left(= \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k)\right)}$$

Preuve:

■

Remarque 7 Dans la deuxième écriture (i.e. la réécriture en termes de probabilités conditionnelles), si $P(A_k) = 0$, on conviendra que $P_{A_k}(B)\,P(A_k) = 0$ *(programme officiel)*

POINT MÉTHODE 3 :
Formule à utiliser avec un système complet d'événements ($\boxed{\text{SOIT} \ldots \text{SOIT} \ldots}$)

Expérience 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Une urne $\mathcal{U}$ contient des jetons numérotés: 1 jeton $n°1$, 2 jetons $n°2$, ... , n jetons $n°n$.
On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. L'urne i contient i boules blanches et $(n - i)$ boules noires.
L'expérience consiste à tirer un jeton dans $\mathcal{U}$. S'il porte le $n°i$, on prélève une boule dans l'urne $n°i$.
Quelle est la probabilité que la boule tirée soit blanche?
1. Evénements: *la boule est prélevée SOIT dans l'urne 1, SOIT dans l'urne 2, ..., SOIT dans l'urne n.*
Soient les événements: $U_k =$" la boule est prélevée dans l'urne $n°k$ ", $k = 1, \ldots, n$.
Soit $B =$" la boule prélevée est blanche ".
Les (U_k) forment un système complet d'événements, donc:
2. Formule des probabilités totales:

3. Calculs:

3.2.3 Formule de Bayès

Dans ce paragraphe, on remonte le temps!
Expérience 2. Le second tirage ayant donné une boule noire (participe passé = SACHANT), quelle est la probabilité que le premier tirage ait donné une boule blanche?
On cherche $P_{N_2}(B_1)$: la chronologie de l'expérience est donc inversée, il faut la remettre dans le bon ordre:
Etape 1: remettre le temps dans le bon ordre.

$$P_{N_2}(B_1) = \frac{P(N_2 \cap B_1)}{P(N_2)} = \frac{P(B_1) \times P_{B_1}(N_2)}{P(N_2)}.$$

Etape 2: connaît-on $P(N_2)$?

- Si OUI: STOP! (en fait, le sujet aura fait calculé $P(N_2)$ dans une question précédente)
- Si NON: Formule des probabilités totales.

$$P_{N_2}(B_1) = \frac{P(B_1) \times P_{B_1}(N_2)}{P_{B_1}(N_2)\,P(B_1) + P_{N_1}(N_2)\,P(N_1)}.$$

Proposition 6 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.*
Soient A et B deux événements de Ω tels que $0 < P(A) < 1$ et $P(B) \neq 0$.

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P_A(B)\,P(A)}{P(B)} = \frac{P_A(B)\,P(A)}{P_A(B)\,P(A) + P_{\overline{A}}(B)\,P(\overline{A})}}$$

Généralisation:

Théorème 5 **Formule de Bayès:**
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.
Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements tels que $P(A_i) \neq 0$, $\forall i \in [|1, n|]$.
$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(B) \neq 0$,

$$\boxed{P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)\,P(A_i)}{P(B)} = \frac{P_{A_i}(B)\,P(A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)\,P(A_k)}}$$

Preuve:

■

Expérience 3. Quelle est la probabilité que la boule soit tirée de l'urne 1, sachant qu'elle est blanche?
On cherche $P_B(U_1)$. Formule de Bayès:

3.3 Indépendance

Intuitivement, deux événements A et B sont indépendants quand la réalisation de l'un n'a aucune influence sur celle de l'autre: il n'y a aucun lien de cause à effet entre A et B.
Mathématiquement: $P_A(B) = P(B)$ *SI* $P(A) \neq 0$. Ce qui s'écrit encore:
$P_A(B) = P(B) \iff \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
On va alors plutôt prendre cette dernière égalité comme définition de l'indépendance entre deux événements car elle est encore valable si $P(A) = 0$.
En effet: $A \cap B \subset A$ donc $P(A \cap B) \leqslant P(A)$, donc si $P(A) = 0$ alors $0 \leqslant P(A \cap B) \leqslant 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0$, et on retrouve bien $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Définition 7 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, et A ET B deux événements de Ω.*
On dit que A et B sont **indépendants** *si* $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$
Ou de façon équivalente, **si** *$P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants ssi* $\boxed{P_A(B) = P(B)}$

Remarque 8 :
(1) Un événement de probabilité nulle est indépendant de toute autre événement.
(2) Ne pas confondre événements INCOMPATIBLES ($P(A \cap B) = 0$) et événements INDÉPENDANTS ($P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$)!!!
(3) L'indépendance n'est en général pas démontrable, mais constitue un choix (ou une conséquence) de la modélisation. Pour montrer que deux événements sont indépendants, c'est qu'il existe une hypothèse d'indépendance (implicite) dans les données du problème:
si les épreuves $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ sont indépendantes (lancers de dé successifs, tirages avec remises, ...) alors les événements $A_1, \ldots, A_n$ respectivement liés aux épreuves $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ sont indépendants.

Expérience 4. On lance deux fois un dé non pipé et on relève les numéros des faces obtenus.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$, donc card$\Omega = 36$.
Ω est fini et il y a équiprobabilité, donc on munit Ω de la probabilité uniforme.
Considérons les événements: $A_1 =$" le premier lancer donne un numéro pair " et
$A_2 =$" le numéro 3 sort au deuxième lancer ".
Intuitivement, A_1 et A_2 sont indépendants, vérifions le:

Proposition 7 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.*
Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont respectivement indépendants.

Preuve:

■

Généralisation:

Définition 8 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille d'événements de Ω.*
(1) On dit que les événements A_i sont **deux à deux indépendants** *ssi:*

$$\forall i \neq j \text{ , } A_i \text{ et } A_j \text{ sont indépendants: } P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)\,.$$

(2) On dit que $(A_1, \ldots, A_n)$ sont **mutuellement indépendants** *si:*

$$\text{pour tout sous-ensemble } I \subset [\![1, n]\!],\ P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)\,.$$

Expérience 4. Soit l'événement $A_3 =$" le deuxième lancer donne un numéro impair ".
A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants ssi: $(n = 3)$
* $P(A_1) = P(A_1)$ $(I = \{1\})$; $P(A_2) = P(A_2)$ $(I = \{2\})$; $P(A_3) = P(A_3)$ $(I = \{3\})$: c'est clair!
* $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$ $(I = \{1, 2\})$; $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_3)$ $(I = \{1, 3\})$;
$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \times P(A_3)$ $(I = \{2, 3\})$: c'est l'indépendance deux à deux!!!
* $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3)$ $(I = \{1, 2, 3\})$

Remarque 9 **Mutuelle indépendance $\Rightarrow$ indépendance deux à deux**

et donc par contraposée:

Des événements non indépendants deux à deux ne sont pas mutuellement indépendants

Expérience 4. On sait déjà que A_1 et A_2 sont indépendants. A_2 et A_3 le sont-ils?

Remarque 10 ATTENTION: LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE !!
Contre-exemple: Soit l'événement $A_4 =$" la somme des deux numéros obtenus est paire ".
Alors A_1, A_3, A_4 sont deux à deux indépendants (exercice) mais non mutuellement indépendants. En effet:
$A_1 \cap A_3 \cap A_4$ est un événement impossible donc $P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = 0$.
Or $P(A_4) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$ (dénombrez à la main!), donc $P(A_1) \times P(A_3) \times P(A_4) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8} \neq 0$, donc A_1, A_3, A_4 ne sont pas mutuellement indépendants.

***Proposition 8* (ADMISE):** *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.*
Soient $A_1, \ldots, A_n$ n événements deux à deux (respectivement mutuellement) indépendants.
Posons $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Alors les événements $B_1, \ldots, B_n$ sont deux à deux (respectivement mutuellement) indépendants.