

## Espaces probabilisés finis

### I. Probabilité uniforme

**Exercice 1** On lance successivement trois pièces de monnaie. Déterminer la probabilité des événements :

1.  $A =$  " il y a exactement deux Faces "
2.  $B =$  " il y a au moins deux Faces "

**Exercice 2** Dans une tombola, 1 000 billets sont mis en vente, et deux sont gagnants. Combien faut-il acheter de billets pour avoir une probabilité supérieure à  $\frac{1}{2}$  d'avoir au moins un billet gagnant?

**Exercice 3** Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On tire simultanément trois boules de cette urne (on suppose que  $n \geq 3$ ). Quelle est la probabilité que le plus petit numéro sorti soit égal à 2? Pour quelle valeur de  $n$  cette probabilité est-elle maximale?

### II. Formule de Bayès

**Exercice 4** Lors d'un jeu, un candidat choisit une question en tirant au hasard un papier parmi trois. Il y a :

- une question facile, pour laquelle on a 3 chances sur 4 de donner la réponse exacte,
- une question moyenne, pour laquelle on a 2 chances sur 5 de donner la réponse exacte,
- une question difficile, pour laquelle on a 1 chances sur 5 de donner la réponse exacte.

Sachant que le candidat a donné la bonne réponse, quelle est la probabilité qu'il ait tiré la question facile?

**Exercice 5** La proportion de pièces défectueuses dans un lot de pièces est 0,05. Le contrôle de fabrication des pièces est tel que: si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0,96; si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0,98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité:

1. qu'il y ait une erreur de contrôle?
2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise?

**Exercice 6** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dispose de  $n$  urnes. Pour tout  $k$  compris entre 1 et  $n$ , l'urne  $k$  contient  $k$  boules dont une seule est noire. On choisit une urne au hasard puis une boule au hasard de cette urne.

Sachant que l'on a tiré une boule noire, exprimer, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la probabilité que cette boule provienne de l'urne  $k$

en fonction de la somme  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

### III. Formule des probabilités composées

**Exercice 7** Un sac contient initialement 3 bonbons jaunes et 12 bonbons roses. On effectue des tirages successifs d'un bonbon de ce sac selon le protocole suivant:

si on tire un bonbon rose, on le remet dans le sac avant le prochain tirage;  
si on tire un bonbon jaune, on le mange.

1. Quelle est la probabilité de manger au moins un bonbon jaune au cours des  $n$  premiers tirages?
2. (\*) Quelle est la probabilité de manger exactement un bonbon jaune au cours des  $n$  premiers tirages?

**Exercice 8** Une personne se trouve devant une porte fermée à clé. Elle dispose d'un trousseau de 10 clés parmi lesquelles une seule ouvre la porte. Elle essaie les clés au hasard l'une après l'autre, en écartant les clés déjà essayées. Quelle est la probabilité qu'elle ouvre la porte au  $k$ -ième essai?

**Exercice 9** Un rat de laboratoire est soumis à l'expérience suivante:

il est enfermé dans une cage comportant quatre portes, derrière lesquelles se trouve un morceau de gruyère. Trois des quatre portes sont munies d'un dispositif envoyant au rat une décharge électrique s'il essaye de les franchir; la quatrième laisse le passage libre.

1. On suppose que le rat a une mémoire directe: il ne se souvient que de la porte précédente.  
Calculer la probabilité que le rat trouve la bonne porte au  $k$ -ième essai. ( $k \in \mathbb{N}^*$ )
2. Reprendre la question précédente dans le cas où le rat a une très bonne mémoire et se souvient de tous les essais passés.

#### IV. Formule des probabilités totales.

**Exercice 10** On dispose de trois urnes numérotées de 0 à 2 et d'une pièce. L'urne  $k$  contient  $k$  boules rouges et  $2 - k$  boules noires pour tout  $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ . On lance deux fois la pièce et on tire une boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de piles obtenus.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge?
2. On a tiré une boule rouge. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne 1?

**Exercice 11** Une compagnie aérienne étudie la réservation de l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour de l'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante: si la place est réservée le jour  $k$ , elle le sera le jour  $k + 1$  avec la probabilité  $\frac{9}{10}$ ; si la place est libre le jour  $k$ , elle sera réservée le jour  $k + 1$  avec la probabilité  $\frac{4}{10}$ .

Pour  $k$  entier positif, on note  $r_k$  la probabilité que la place soit réservée le jour  $k$ .

1. Exprimer  $r_{k+1}$  en fonction de  $r_k$ .
2. En déduire l'expression explicite de  $r_k$  en fonction de  $k$ .

**Exercice 12** On considère un fumeur qui essaie d'arrêter de fumer tous les jours. On note  $p_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) la probabilité qu'il fume le  $n$ -ième jour.

- Si le fumeur a réussi à ne pas fumer un jour, il ne fume pas le lendemain avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ .
- S'il fume un jour, il ne fume pas le lendemain avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ .

1. Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , exprimer  $p_{n+1}$  en fonction de  $p_n$ .
2. En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_n$  en fonction de  $n$  et de  $p_1$ .
3. Calculer la limite de  $p_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 13** Une roue de loterie se compose de secteurs identiques numérotés de 1 à 12.

Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

A chaque partie, un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les douze. Il est gagnant si le secteur qui s'arrête devant le repère porte l'un des numéros qu'il a choisis.

Un joueur possédant un crédit illimité, il effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante:

- Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.
- S'il perd à la  $n$ ième partie,  $n \geq 1$ , il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante, et s'il gagne à la  $n$ ième partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.

On note  $p_n$  la probabilité de l'événement  $A_n =$  "le joueur gagne la  $n$ ième partie".

1. Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{1}{12} p_n + \frac{1}{6}.$$

2. En déduire l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$  et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ .

**Exercice 14** Deux pièces (une chambre et la salle)  $A$  et  $B$  sont reliées entre elles de la façon suivante:  $A$  ouvre sur  $B$  et  $B$  ouvre sur l'extérieur. Une guêpe initialement (à l'instant 0) dans la pièce  $A$  voudrait sortir à l'air libre. A chaque instant  $n \in \mathbb{N}$  son trajet obéit aux règles suivantes:

- Lorsqu'elle est dans la pièce  $A$  au temps  $n$ , alors au temps  $n + 1$  elle reste en  $A$  avec une probabilité de  $1/3$  et elle passe dans la pièce  $B$  avec une probabilité de  $2/3$ .
- Lorsqu'elle est en  $B$  au temps  $n$ , alors au temps  $n + 1$  elle retourne en  $A$  avec une probabilité de  $1/4$ , elle reste en  $B$  avec une probabilité de  $1/2$  et elle sort à l'air libre avec une probabilité de  $1/4$ .
- Enfin, lorsqu'elle est à l'air libre, elle ne revient plus.

Pour tout entier  $n$ , on notera  $A_n$  l'événement "la guêpe est dans la pièce  $A$  à l'instant  $n$ " et de même  $B_n$ .

$D_n$  pour "être dehors à l'instant  $n$ " et  $S_n$  l'événement "la guêpe sort à l'instant  $n$ ".

On notera  $a_n, b_n, d_n$  et  $s_n$  leurs probabilités respectives.

- (a) Déterminer les probabilités  $a_0, b_0, s_0, a_1, b_1, s_1$  et  $s_2$ .
- (b) Sachant qu'à l'instant 2 elle est en  $A$ , quelle est la probabilité qu'elle ait été en  $B$  à l'instant 1?
- (c) Pour tout entier  $n$ , établir les relations de récurrence suivantes :

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$$

- Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $b_n = 2a_n$ .
  - En déduire pour  $n \geq 1$ , l'expression de  $a_n$  et de  $b_n$  en fonction de  $n$ .
  - Calculer les limites de  $a_n$  et de  $b_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et interpréter ce résultat.
- (a) Justifier que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $s_n = \frac{1}{4}b_{n-1}$  et en déduire  $s_n$  en fonction de  $n$ .
  - (b) Déterminer la probabilité que la guêpe est dehors à l'instant 10. (on ne cherchera pas à simplifier le résultat)

## V. Indépendance

**Exercice 15** Une urne contient une boule noire et  $n - 1$  boules blanches. On effectue  $n$  tirages au hasard d'une boule avec remise.

Quelle est la probabilité  $p_n$  que la boule noire ne sorte à aucun des tirages? Quelle est la limite de  $p_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ?

**Exercice 16** Un archer tire sur des cibles situées à 20 m et à 50 m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la cible à 20 m (resp. 50 m) est  $p$  (resp.  $q$ ) avec  $q < p$ . On suppose les tirs indépendants. Il gagne le jeu s'il atteint deux cibles consécutivement.

Calculer la probabilité de gagner en commençant par la cible située à 20 m (resp. 50 m). Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer?

**Exercice 17** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On joue  $n$  fois à pile ou face avec une pièce équilibrée. Les lancers sont mutuellement indépendants. On gagne si l'on obtient deux fois de suite le même résultat. Quelle est la probabilité de gagner?

**Exercice 18** Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relecteurs pour correction.

À chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité  $\frac{1}{3}$ . Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la  $n$ -ième lecture?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la  $n$ -ième lecture? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0,9?