Espaces probabilisés finis

I. Probabilité uniforme

Exercice 1 On lance sept fois de suite un même dé à 20 faces.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros distincts à chaque lancer ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir toujours le même numéro ?

Exercice 2 Dans une tombola, 1 000 billets sont mis en vente, et deux sont gagnants. Combien faut-il acheter de billets pour avoir une probabilité supérieure à $\dfrac{1}{2}$ d'avoir au moins un billet gagnant?

Exercice 3 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire simultanément trois boules de cette urne (on suppose que $n \geqslant 3$). Quelle est la probabilité que le plus petit numéro sorti soit égal à 2? Pour quelle valeur de n cette probabilité est-elle maximale?

II. Formule de Bayès

Exercice 4 Lors d'un jeu, un candidat choisit une question en tirant au hasard un papier parmi trois. Il y a:

- une question facile, pour laquelle on a 3 chances sur 4 de donner la réponse exacte,
- une question moyenne, pour laquelle on a 2 chances sur 5 de donner la réponse exacte,
- une question difficile, pour laquelle on a 1 chances sur 5 de donner la réponse exacte.

Sachant que le candidat a donné la bonne réponse, quelle est la probabilité qu'il ait tiré la question facile?

Exercice 5 Une compagnie d'assurance répartit ses cleints en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1, 50% pour la classe R_2 et 30% pour la classe R_3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement $0,05$; $0,15$ et $0,30$.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?
2. Si M. Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n urnes. Pour tout k compris entre 1 et n, l'urne k contient k boules dont une seule est noire. On choisit une urne au hasard puis une boule au hasard de cette urne.
Sachant que l'on a tiré une boule noire, exprimer, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la probabilité que cette boule provienne de l'urne k en fonction de la somme $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

III. Formule des probabilités composées

Exercice 7 Un sac contient initialement 3 bonbons jaunes et 12 bonbons roses. On effectue des tirages successifs d'un bonbon de ce sac selon le protocole suivant:
si on tire un bonbon rose, on le remet dans le sac avant le prochain tirage;
si on tire un bonbon jaune, on le mange.

1. Quelle est la probabilité de manger au moins un bonbon jaune au cours des n premiers tirages?
2. $(*)$ Quelle est la probabilité de manger exactement un bonbon jaune au cours des n premiers tirages?

Exercice 8 Une personne se trouve devant une porte fermée à clé. Elle dispose d'un trousseau de 10 clés parmi lesquelles une seule ouvre la porte. Elle essaie les clés au hasard l'une après l'autre, en écartant les clés déjà essayées. Quelle est la probabilité qu'elle ouvre la porte au k-ième essai?

Exercice 9 Un rat de laboratoire est soumis à l'expérience suivante:
il est enfermé dans une cage comportant quatre portes, derrière lesquelles se trouve un morceau de gruyère. Trois des quatre portes sont munies d'un dispositif envoyant au rat une décharge électrique s'il essaye de les franchir; la quatrième laisse le passage libre.

1. On suppose que le rat a une mémoire directe: il ne se souvient que de la porte précédente.
   Calculer la probabilité que le rat trouve la bonne porte au k-ième essai. ($k \in \mathbb{N}^*$)

2. Reprendre la question précédente dans le cas où le rat a une très bonne mémoire et se souvient de tous les essais passés.

IV. Formule des probabilités totales.

Exercice 10 On dispose de trois urnes numérotées de 0 à 2 et d'une pièce. L'urne k contient k boules rouges et $2-k$ boules noires pour tout $k \in [\![0,2]\!]$. On lance deux fois la pièce et on tire une boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de piles obtenus.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge?

2. On a tiré une boule rouge. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne 1?

Exercice 11 Une compagnie aérienne étudie la réservation de l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour de l'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante: si la place est réservée le jour k, elle le sera le jour $k+1$ avec la probabilité $\dfrac{9}{10}$; si la place est libre le jour k, elle sera réservée le jour $k+1$ avec la probabilité $\dfrac{4}{10}$.
Pour k entier positif, on note r_k la probabilité que la place soit réservée le jour k.

1. Exprimer r_{k+1} en fonction de r_k.

2. En déduire l'expression explicite de r_k en fonction de k.

Exercice 12 On considère un fumeur qui essaie d'arrêter de fumer tous les jours. On note p_n ($n \in \mathbb{N}^*$) la probabilité qu'il fume le n-ième jour.

- Si le fumeur a réussi à ne pas fumer un jour, il ne fume pas le lendemain avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.

- S'il fume un jour, il ne fume pas le lendemain avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n en fonction de n et de p_1.

3. Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 13 Une roue de loterie se compose de secteurs identiques numérotés de 1 à 12.
Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.
A chaque partie, un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les douze. Il est gagnant si le secteur qui s'arrête devant le repère porte l'un des numéros qu'il a choisis.
Un joueur possédant un crédit illimité, il effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante:

- Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.

- S'il perd à la $n$ième partie, $n \geqslant 1$, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante, et s'il gagne à la $n$ième partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.

On note p_n la probabilité de l'événement $A_n =$" le joueur gagne la $n$ième partie".

1. Montrer que:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{1}{12}\, p_n + \frac{1}{6}\,.$$

2. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 14 Deux pièces (une chambre et la salle) A et B sont reliées entre elles de la façon suivante: A ouvre sur B et B ouvre sur l'exterieur. Une guèpe initialement (à l'instant 0) dans la pièce A voudrait sortir à l'air libre. A chaque instant $n \in \mathbb{N}$ son trajet obéit aux règles suivantes:

- Lorsqu'elle est dans la pièce A au temps n, alors au temps $n+1$ elle reste en A avec une probabilité de $1/3$ et elle passe dans la pièce B avec une probabilité de $2/3$.
- Lorsqu'elle est en B au temps n, alors au temps $n+1$ elle retourne en A avec une probabilité de $1/4$, elle reste en B avec une probabilité de $1/2$ et elle sort à l'air libre avec une probabilité de $1/4$.
- Enfin, lorsqu'elle est à l'air libre, elle ne revient plus.

Pour tout entier n, on notera A_n l'événement "la guèpe est dans la pièce A à l'instant n " et de même B_n.
D_n pour "être dehors à l'instant n " et S_n l'événement "la guèpe sort à l'instant n".
On notera a_n, b_n, d_n et s_n leurs probabilités respectives.

1. (a) Déterminer les probabilités a_0, b_0, s_0, a_1, b_1, s_1 et s_2.
   (b) Sachant qu'à l'instant 2 elle est en A, quelle est la probabilité qu'elle ait été en B à l'instant 1?
   (c) Pour tout entier n, établir les relations de récurrence suivantes :
   $$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$$
   (d) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 2a_n$.
   (e) En déduire pour $n \geqslant 1$, l'expression de a_n et de b_n en fonction de n.
   (f) Calculer les limites de a_n et de b_n quand n tend vers $+\infty$ et interprèter ce résultat.
2. (a) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 2$, $s_n = \dfrac{1}{4}b_{n-1}$ et en déduire s_n en fonction de n.
   (b) Déterminer la probabilité que la guèpe est dehors à l'instant 10. (on ne cherchera pas à simplifier le résultat)

V. Indépendance

Exercice 15 Une urne contient une boule noire et $n-1$ boules blanches. On effectue n tirages au hasard d'une boule avec remise.
Quelle est la probabilité p_n que la boule noire ne sorte à aucun des tirages? Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 16 On dispose de trois composants C_1, C_2 et C_3 dont la probabilité de fonctionnement est p_i. Le fonctionnement d'un composant est supposé totalement indépendant des autres. Donner la probabilité de fonctionnement du circuit dans les cas suivants :

1. si les composants sont disposés en série.
2. si les composants sont disposés en parallèle.
3. si le circuit est mixte : C_1 est disposé en circuit avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

Exercice 17 Un archer tire sur des cibles situées à 20 m et à 50 m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la cible à 20 m (resp. 50 m) est p (resp. q) avec $q < p$. On suppose les tirs indépendants. Il gagne le jeu s'il atteint deux cibles consécutivement.
Calculer la probabilité de gagner en commençant par la cible située à 20 m (resp. 50 m). Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer?

Exercice 18 Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relecteurs pour correction.
À chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième lecture?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième lecture? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à $0,9$?