Systèmes linéaires

BCPST 1C – Mme MOREL

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ *désigne* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$

Introduction

Rappel: résolution de systèmes par les méthodes de substitution ou élimination.

Exemple 1 Résoudre par les deux méthodes les systèmes suivants:

$$(\mathcal{S}_1)\quad \left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = 1 \\ 3x & + & 4y & = 5 \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S}_2)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = 1 \\ 2x & - & y & + & z & = -1 \\ & & y & - & z & = 2 \end{array}\right.$$

Ces deux méthodes de résolution sont basées sur la réduction du nombre d'inconnues. La méthode par substitution devient très fastidieuse quand le nombre d'inconnues augmente: elle entraîne beaucoup de calculs, avec donc de fortes chances de se tromper. La méthode par combinaison, elle, est plus simple, c'est donc cette méthode qui est privilégiée pour les "gros" systèmes linéaires.

Remarque 1 Dans le cas de systèmes non linéaires, on pourra penser à la substitution (cf la recherche des points critiques pour les fonctions de plusieurs variables)

Exemple 2 : $(\mathcal{S})\quad \left\{\begin{array}{cccc} x & + & y & = -2 \\ x & \times & y & = -3 \end{array}\right.$.

Par substitution: $(\mathcal{S}) \iff \left\{\begin{array}{l} x = -2 - y \\ (-2-y)\times y = -3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = -2 - y \\ y^2 + 2y - 3 = 0 \end{array}\right.$

On retrouve le produit et la somme des racines d'un trinôme du second degré...

Les couples $(1, -3)$ et $(-3, 1)$ sont solutions. Or on établira dans la partie 3. qu'un système linéaire a zéro, une ou une infinité de solutions...

1 Systèmes linéaires

1.1 Généralités

Définition 1 *On appelle* **système linéaire de n équations à p inconnues** $(x_1, \ldots, x_p)$ *tout système* $(\mathcal{S})$ *de la forme:*

$$(\mathcal{S})\quad \left\{\begin{array}{cccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{1p}\,x_p & = b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{2p}\,x_p & = b_2 \\ & & & & \vdots & & & \\ a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{np}\,x_p & = b_n \end{array}\right.$$

où:

• *les* **inconnues** *de* $(\mathcal{S})$ *sont les nombres complexes ou réels* $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p$,

• *les* **coefficients** *de* $(\mathcal{S})$ *sont les nombres* $a_{ij} \in \mathbb{K}$. *Ils sont affectés d'un double indice: le premier,* i, *est l'indice de l'équation, le second,* j, *l'indice de l'inconnue:*

$$a_{ij} \text{ est le coefficient de la } j^{\text{ième}} \text{ inconnue dans la } i^{\text{ième}} \text{ équation.}$$

• *le* **second membre** *de* $(\mathcal{S})$ *est* $(b_1, \ldots b_j, \ldots, b_n)$, *où* $b_i \in \mathbb{K}$, *pour tout* i.

Une **solution** *de* $(\mathcal{S})$ *est un p-uplet* $(x_1, \ldots, x_p)$ *qui vérifie simultanément les* n *équations.*

Résoudre $(\mathcal{S})$, *c'est déterminer toutes les solutions de* $(\mathcal{S})$:

• $(\mathcal{S})$ *est dit* **incompatible** *s'il n'admet aucune solution,*

• $(\mathcal{S})$ *est dit* **indéterminé** *s'il admet une infinité de solutions,*

• $(\mathcal{S})$ *est dit* **de Cramer** *si* $n = p$ *(autant d'équations que d'inconnues) et s'il admet une solution unique.*

Deux systèmes linéaires $(\mathcal{S})$ *et* $(\mathcal{S}')$ *sont dits* **équivalents** *s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Remarque 2 si deux équations ont le même membre de gauche, mais des termes de droite différents: le système est incompatible!

Exemple 3 Le système suivant est évidemment incompatible (sans même connaître le nombre d'équations!)

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & x_2 & + & \dots & + & x_p & = 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & \dots & + & x_p & = 2 \\ & & & & \vdots & & & \end{array}\right.$$

Remarque 3 :
(1) il n'y a pas forcément autant d'inconnues que d'équations:

Exemple 4 :
(1)

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & 2y & - & 3z & = -3 \\ & & y & + & z & = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x & = -3-2y+3z = -3-2+2z+3z = -5+5z \\ y & = 1-z \end{array}\right.$$

Il y a donc une infinité de solutions: $\mathcal{S} = \{(-5+5z, 1-z, z), z \in \mathbb{R}\}$.
On dit que z est une inconnue auxiliaire.
L'ensemble solution ne dépend pas du choix de l'inconnue auxiliaire: on aurait pu fixer z! En effet:

(2)

$$\left\{\begin{array}{cccl} x & + & y & = 1 \\ x & - & y & = 2 \\ 2x & + & y & = -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccl} x & + & y & = 1 \\ & - & 2y & = 1 \\ & - & y & = -3 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_1 \end{array} \iff \left\{\begin{array}{cccl} x & + & y & = 1 \\ & & y & = -1/2 \\ & & y & = 3 \end{array}\right.$$

Il n'y a donc aucune solution: $\mathcal{S} = \emptyset$.

(2) Même si $n = p$ (autant d'équations que d'inconnues), un système linéaire n'est pas forcément de Cramer.

Exemple 5

$$\left\{\begin{array}{cccccl} x & + & y & + & z & = 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = 1 \\ x & - & y & + & 3z & = 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccl} x & + & y & + & z & = 3 \\ & - & y & + & z & = -5 \\ & - & 2y & + & 2z & = 2 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccl} x & + & y & + & z & = 3 \\ & - & y & + & z & = -5 \\ & - & y & + & z & = 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_3 \end{array}$$

Le système est incompatible (voir la remarque précédente), donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

1.2 Systèmes linéaires homogènes

Définition 2 *Un système linéaire est dit* **homogène** *lorsque son second membre est nul.*

Exemple 6 $(\mathcal{S}_1)$ $\left\{\begin{array}{cccl} x & + & y & = 0 \\ 2x & - & 5y & = 0 \end{array}\right.$

1.3 Systèmes linéaires échelonnés

Définition 3 **:**
Un système linéaire **échelonné** *est un système linéaire dont chaque ligne commence par plus de coefficients nuls que la ligne précédente.*
Sur chaque ligne, la première inconnue figurant avec un coefficient non nul est appelée **inconnue principale** *du système.*
Les inconnues non principales sont dites **auxiliaires**.
Le premier coefficient non nul de chaque ligne s'appelle le **pivot**.
On appelle **équation principale** *une équation contenant un pivot et* **équation auxiliaire***, une équation qui ne contient aucun pivot.*
Un système échelonné contenant autant d'équations que d'inconnues est dit **triangulaire**.

Exemple 7

$$(\mathcal{S}_1)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrl} \boxed{2}x & + & y & + & z & =5 \\ & & \boxed{-1}\,y & + & 2z & =-1 \\ & & & & \boxed{5}z & =1 \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S}_2)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{1}x & + & y & + & 2z & + & t & =1 \\ & & & & \boxed{2}z & - & t & =-3 \end{array}\right.$$

(les pivots sont encadrés)

Exercice 1 Dire si les systèmes suivants sont échelonnés (on conseille d'encadrer les pivots):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & =1 \\ & & & & z & & & =-3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & y & + & 3z & =9 \\ & - & y & + & 2z & =-1 \\ & & y & & & =10 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & + & t & =1 \\ & & & & z & & & =-3 \\ & & & & & & 5t & =-9 \end{array}\right.$$

La résolution des systèmes échelonnés est très simple: il suffit d'exprimer les inconnues principales en fonction des inconnues auxiliaires (s'il y en a) en commençant par la dernière équation du système puis en remontant par substitutions successives (dites substitutions remontantes).

Exemple 8 (reprise de l'exemple 7)

$$(\mathcal{S}_1) \iff \left\{\begin{array}{l} x=(5-y-z)/2=17/10 \\ y=1+2z=7/5 \\ z=1/5 \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S}_2) \iff \left\{\begin{array}{l} x=1-y-2z-t=1-y-t+3-t=4-y-2t \\ z=(-3+t)/2 \end{array}\right.$$

Donc $\mathcal{S}_1=\{(\frac{17}{10},\frac{7}{5},\frac{1}{5})\}$ et $\mathcal{S}_2=\{(4-y-2t,y,\frac{-3+t}{2},t),(y,t)\in\mathbb{R}^2\}$.

Remarque 4 On aurait pu résoudre $(\mathcal{S}_2)$ autrement...

Exercice 2 Dire si les systèmes suivants sont échelonnés, et dans ce cas encadrer les pivots, puis le résoudre:

$$(\mathcal{S}_1)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 4z & = & 1 \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S}_2)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 4z & = & -2 \end{array}\right.$$

$$(\mathcal{S}_3)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & 2z & = & 3 \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S}_4)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & 2t & = & -1 \\ & & 2y & - & 2z & + & t & = & 1 \\ & & & & 2z & - & t & = & 2 \end{array}\right.$$

2 Méthode du pivot de Gauss (résolution des systèmes linéaires)

Les systèmes échelonnés étant simples à résoudre, la méthode du pivot de Gauss est une méthode systématique qui consiste, en un nombre fini d'étapes, à transformer un système linéaire $(\mathcal{S})$ quelconque, en un système **échelonné** $(\mathcal{T})$ **équivalent** à $(\mathcal{S})$. A chaque étape de cette méthode, on utilise des opérations élémentaires sur les lignes.

2.1 Opérations élémentaires sur les lignes

Définition 4 *Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire à n équations, p inconnues.*
$\forall i\in[|1,n|]$, on note L_i la $i^{\text{ième}}$ équation de $(\mathcal{S})$, appelée aussi la $i^{\text{ième}}$ ligne de $(\mathcal{S})$.
On appelle **opération élémentaire** *sur les lignes l'une des trois transformations suivantes:*

- *$L_i \leftarrow a\,L_i$, $a\neq 0$: multiplier la $i^{\text{ième}}$ ligne par a.*
- *Pour $i\neq j$, $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$: échanger les lignes i et j.*
- *$\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + a\,\mathrm{L}_j$, $i\neq j$: ajouter à la $i^{\text{ième}}$ ligne, la $j^{\text{ième}}$ ligne multipliée par a.*

Proposition 1 **(admise):** *Tout système obtenu à partir de $(\mathcal{S})$ en transformant l'une de ses équations par une opération élémentaire est équivalent à $(\mathcal{S})$, et a donc le même ensemble de solutions.*

Remarque 5 :
(1) Ne JAMAIS multiplier deux lignes entre elles!!! (on perd l'équivalence des systèmes).
(2) L'opération suivante est licite (en combinant la première et la troisième):

$$L_i \leftarrow a\,L_i + b\,L_j \text{ (avec } a \neq 0,\ i \neq j).$$

(3) Sur une copie, toujours indiquer les opérations élémentaires effectuées:

$$\boxed{\text{LE CORRECTEUR NE LIRA AUCUN CALCUL NON COMMENTE}}$$

Exemple 9

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = 3 \\ x & + & 2y & + & z & = 1 \\ x & + & 4y & + & 2z & = 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc l} x & + & y & + & z & = 3 & \\ & & y & & & = -2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & 3y & + & z & = 2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccc l} x & + & y & + & z & = 3 & \\ & & y & & & = -2 & \\ & & & & z & = 8 & L_3 \leftarrow L_3 - 3\,L_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 3 - y - z = -3 \\ y = -2 \\ z = 8 \end{array}\right.$$

Conclusion: $\mathcal{S} = \{(-3, -2, 8)\}$ (unique solution: système de Cramer).

Pour obtenir un système échelonné équivalent, nous n'avons pas utilisé les opérations élémentaires au hasard, mais selon un algorithme bien précis.

2.2 Algorithme du pivot de Gauss

Algorithme:

1. Procédé d'élimination successive des inconnues, par des opérations élémentaires sur les lignes, pour se ramener à un système échelonné équivalent, appelé **réduite de Gauss** du système de départ.

2. Résolution du système échelonné obtenu par substitutions remontantes.

Exemple 10 : Mise en oeuvre sur des exemples:
(1) Reprise de l'exemple 8:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \boxed{1}x & + & y & + & z & = 3 \\ x & + & 2y & + & z & = 1 \\ x & + & 4y & + & 2z & = 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc l} \boxed{1}x & + & y & + & z & = 3 & \\ & & \boxed{1}y & & & = -2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & 3y & + & z & = 2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccc l} \boxed{1}x & + & y & + & z & = 3 & \\ & & \boxed{1}y & & & = -2 & \\ & & & & \boxed{1}z & = 8 & L_3 \leftarrow L_3 - 3\,L_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 3 - y - z = -3 \\ y = -2 \\ z = 8 \end{array}\right.$$

(2)

$$\left\{\begin{array}{cccccc} & & 2y & - & z & = 2 \\ x & + & y & + & z & = 0 \\ 2x & - & 3y & + & z & = -5 \\ x & + & 2y & - & z & = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc l} & & & & & & \\ & & & & & & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2x & - & 3y & + & z & = -5 & \\ x & + & 2y & - & z & = 1 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccc l} \boxed{1}x & + & y & + & z & = 0 & \\ & & 2y & - & z & = 2 & \\ & - & 5y & - & z & = -5 & L_3 \leftarrow \ldots \\ & & y & - & 2z & = 1 & L_4 \leftarrow \ldots \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc l} \boxed{1}x & + & y & + & z & = 0 & \\ & & y & - & 2z & = 1 & L_4 \leftrightarrow L_2 \\ & - & 5y & - & z & = -5 & \\ & & 2y & - & z & = 2 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccc l} \boxed{1}x & + & y & + & z & = 0 & \\ & & \boxed{1}y & - & 2z & = 1 & \\ & & & - & 11z & = 0 & L_3 \leftarrow \ldots \\ & & & & 3z & = 0 & L_4 \leftarrow \ldots \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc l} \boxed{1}x & + & y & + & z & = 0 & \\ & & \boxed{1}y & - & 2z & = 1 & \\ & & & & \boxed{\text{-11}}z & = 0 & \\ & & & & & & L_4 \leftarrow \ldots \end{array}\right.$$

Remarque 6 :
(1) Le choix du pivot est fondamental pour éviter la complexité des calculs. On utilise alors l'intervertion des lignes pour sélectionner le meilleur pivot. Les meilleurs pivots sont ceux égaux à 1 et -1.
(2) Attention à bien respecter les deux règles fondamentales pour le choix du pivot:
$*$ un pivot ne peut être nul.
$*$ on ne peut choisir plus d'un pivot par ligne et par colonne.
(3) Le système échelonné ou réduite de Gauss n'est pas unique puisqu'il dépend du choix des pivots. Par contre:

Proposition 2 *Toutes les réduites de Gauss d'un même système linéaire ont le même nombre de pivots. Ce nombre est appelé le* **rang** *du système.*

Remarque 7 Le rang est aussi le nombre d'équations principales ou d'inconnues principales de n'importe quelle réduite de Gauss.

Exemple 11 A vous...

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x - 2y - z = 4 \\ -x + 5y + 2z = 1 \end{cases}$$

Exercice 3 *(Pour comprendre la nécessité d'appliquer la méthode du pivot de Gauss correctement)*

On considère le système suivant: $(\mathcal{S})$ $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

1. Un étudiant propose la résolution suivante:

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} -x - y = 0 & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ -y + 2z = 0 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ x + 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \iff (\mathcal{S}_2) \begin{cases} y = -x \\ y = 2z \\ x = -2z \end{cases}$$

   Terminer la résolution de $(\mathcal{S}_2)$.

2. Résoudre $(\mathcal{S})$ par la méthode du pivot de Gauss.
3. Où est l'erreur dans le raisonnement de l'étudiant?

3 Ensemble des solutions d'un système linéaire

Cette partie reprend de façon théorique les résultats précédents.
On considère le système linéaire:

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1p}\,x_p = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2p}\,x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{np}\,x_p = b_n \end{cases}$$

Méthode du pivot de Gauss:
Quitte à permuter les lignes, on peut supposer que $a_{11} \neq 0$. a_{11} est donc choisi comme pivot et on effectue les opérations:

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_i\,,\ i = 2, \ldots, n\,.$$

On obtient alors un système équivalent à $(\mathcal{S})$ de la forme:

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1p}\,x_p = b_1 \\ a'_{22}\,x_2 + \ldots + a'_{2p}\,x_p = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{n2}\,x_2 + \ldots + a'_{np}\,x_p = b'_n \end{cases}$$

On recommence ainsi de suite jusqu'à obtenir un système équivalent à $(\mathcal{S})$ du type:

$$(\mathcal{T}) \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + \ldots + a_{1p}\,x_p = b_1 \\ \alpha_{22}\,x_2 + \ldots + \ldots + \alpha_{2p}\,x_p = \beta_2 \\ \ddots \qquad \vdots \\ \alpha_{rr}\,x_r + \ldots + \alpha_{rp}\,x_p = \beta_r \\ 0 = \beta_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = \beta_n \end{cases},$$

où les pivots $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{rr}$ sont donc non nuls. Et par définition, r est le ...... du système.

Discussion sur le nombre de solutions:
Selon la nature des $n - r$ équations auxiliaires, on peut déterminer les solutions du système.

1. **si il existe $\beta_i \neq 0$:** alors le système est incompatible et n'admet aucune solution.

   Exemple 12 :
   (1) $n > p$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & + & y & + & z & = 3 \\ & - & y & + & z & = -5 \\ & & & & z & = 1 \\ & & & & z & = 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & + & y & + & z & = 3 \\ & - & y & + & z & = -5 \\ & & & & z & = 1 \\ & & & & 0 & = 2 \end{array}\right.$$

   (2) $n = p$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & + & y & + & z & = 3 \\ & - & y & + & z & = -5 \\ & - & 2y & + & 2z & = 8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & + & y & + & z & = 3 \\ & - & y & + & z & = -5 \\ & & & & 0 & = 2 \end{array}\right.$$

   (3) $n < p$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x & + & y & + & z & + & t & = 3 \\ & & & & z & - & t & = 1 \\ & & & & 2z & - & 2t & = 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x & + & y & + & z & + & t & = 2 \\ & & & & z & - & t & = 1 \\ & & & & & & 0 & = 2 \end{array}\right.$$

2. **si $\beta_i = 0$ pour tout i:** (les équations auxiliaires sont de la forme $0 = 0$). Le système est compatible et:
   (a) **si $(\mathcal{T})$ n'a pas d'inconnues auxiliaires ($r = p$):** $(\mathcal{S})$ a une unique solution, déterminée par substitutions remontantes.

   Exemple 13 : Exprimer l'ensemble des solutions dans chaque cas.
   (1) $n > p$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & + & 2y & - & 3z & = -3 \\ & & y & + & z & = 1 \\ & & & & z & = 2 \\ & & & & 2z & = 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & + & 2y & - & 3z & = -3 \\ & & y & + & z & = 1 \\ & & & & z & = 2 \\ & & & & 0 & = 0 \end{array}\right.$$

   (2) $n = p$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & + & 2y & - & 3z & = -3 \\ & & y & + & z & = 1 \\ & & & & z & = 0 \end{array}\right.$$

   (b) **si $(\mathcal{T})$ a des inconnues auxiliaires ($r < p$):** le système admet une infinité de solutions (indéterminé). Dans ce cas, on exprime toutes les inconnues en fonction de certaines d'entre elles (les inconnues auxiliaires!) qui deviennent des paramètres de l'ensemble des solutions.

   Exemple 14 : exprimer l'ensemble des solutions dans chaque cas.
   (1) $n > p$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} 2x & - & y & - & z & = 0 \\ & & y & + & 2z & = 2 \\ & - & y & - & 2z & = -2 \\ & & 3y & + & 6z & = 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrl} 2x & - & y & - & z & = 0 \\ & & y & + & 2z & = 2 \\ & & & & 0 & = 0 \\ & & & & 0 & = 0 \end{array}\right.$$

   (2) $n = p$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & + & y & + & z & = -1 \\ & - & 3y & - & 2z & = 5 \\ & & 3y & + & 2z & = -5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & + & y & + & z & = -1 \\ & - & 3y & - & 2z & = 5 \\ & & & & 0 & = 0 \end{array}\right.$$

   (3) $n < p$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} 2x & - & y & - & z & = 0 \\ & & 5y & + & 9z & = 2 \end{array}\right.$$

Remarque 8 Cas particulier d'un système linéaire n lignes, n colonnes. On note r son rang.
$*$ **si $r \neq n$ (c'est-à-dire $r < n$):** le système est incompatible ou a une infinité de solutions.
$*$ **si $r = n$:** le système a une unique solution, il est donc de Cramer.
Conclusion: à retenir:

Un système linéaire n lignes, n colonnes, est de Cramer ssi son rang est égal à n