Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C- Madame MOREL

TP 8
Représentations graphiques – suites récurrentes

I. Suites explicites

Exercice 1 On considère la suite (u_n) définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_n = \sin(\pi\sqrt{4n^2+n})\,.$$

1. Tracer les segments $[u_k, u_{k+1}]$ pour k allant de 0 à n choisi judicieusement.
2. Peut-on émettre une conjecture sur la convergence de cette suite?
   Indication: On pourra tracer sur le même graphe la droite d'équation $y = \sin(\frac{\pi}{4})$

Exercice 2 Même exercice que le précédent avec $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II. Suites récurrentes

Exercice 3 On considère la suite (u_n) définie par:

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}\,.$$

1. Tracer les segments $[u_k, u_{k+1}]$ pour k allant de 0 à n choisi judicieusement.
2. En déduire une conjecture sur sa monotonie et sa convergence.
3. Mêmes questions avec $u_0 = -0.5$.

Exercice 4 Même exercice que le précédent avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 5 (Suite de Syracuse)
On considère l'application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, définie par :

$$f(k) = \begin{cases} \frac{k}{2} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 3\,k+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On appelle **Suite de Syracuse d'un entier** N, la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = N \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Écrire une fonction `syracuse(N,n)` d'arguments deux entiers `N` et `n` et renvoyant la valeur de u_n, où (u_n) est la suite de Syracuse d'entier N.

Conjecture de Syracuse : toutes les suites de Syracuse d'entier positif atteignent la valeur 1 au bout d'un certain temps. *(Cette conjecture a été vérifiée pour tous les entiers $0 \leqslant N \leqslant 2^{62}$)*

2. Écrire une fonction `TempsVol(N)` d'argument `N` et renvoyant la plus petite valeur de `n` telle que le $n$ième terme de la suite de Syracuse d'entier N vaut 1.
   on essaiera de ne pas utiliser la suite `syracuse` ...
   Vérifier que `TempsVol(15)` renvoie `17`
3. Tracer les valeurs de `TempsVol(N)` pour $1 \leqslant N \leqslant 1000$.
   Que peut-on en dire ?

III. Dynamisme des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 6 (valeur approchée de $\sqrt{2}$)
Soit $f(x) = x + \dfrac{1}{4}(2 - x^2)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par: $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Tracer dans un même repère:

- le graphe de f,
- la première bissectrice,
- le dynamisme de la suite (u_n).

Exercice 7 (valeur approchée de $\sqrt{3}$)
Même exercice que le précédent avec : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$ et u la suite définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 8 (valeur approchée de $\ln 2$)
On note $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x > 0$, par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 0,1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Tracer dans un même repère:

- le graphe de f,
- la première bissectrice,
- le dynamisme de la suite (u_n).