Matrices

BCPST 1C – Mme MOREL

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.

1 Définitions

1.1 Ensemble $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $n, p \in \mathbb{N}^*$

Définition 1 :
On appelle **matrice de taille** n, p **à coefficients dans** $\mathbb{K}$ *la donnée de $n \times p$ scalaires a_{ij}, $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, p]\!]$, représentés sous forme d'un tableau à n lignes et p colonnes:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ & & \vdots & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices taille n, p à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\boxed{\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})}$

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on note aussi $\boxed{A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}}$

Exemple 1

$$A = \begin{pmatrix} -2 & i & 0 \\ e^{i\frac{\pi}{3}} & \ln 2 & -1 \end{pmatrix} \in \dots\dots \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \\ 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{3} & 1 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \in \dots$$

Définition 2 *Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.*
(1) si $n = 1$, on dit que A est une **matrice ligne**.
(2) si $p = 1$, on dit que A est une **matrice colonne**.
(3) si $n = p$, on dit que A est une **matrice carrée d'ordre** *n. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$.*

Exemple 2 :
$A = (1\ 0\ 4\ \ -2\ 5) \in \dots\dots$: matrice ......
$B = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \in \dots\dots$: matrice ......
$C = \begin{pmatrix} \ln 3 & 1+i \\ j & -1 \end{pmatrix} \in \dots\dots$: matrice ......

Remarque 1 :
(1) On identifie $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}$:
si $A = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$, on écrit $A = a \in \mathbb{K}$.
(2) **La matrice nulle de** $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ (celle où tous ses coefficients sont nuls) est notée O_{np} ou O (s'il n'y a aucune ambiguité sur sa taille).

Exemple 3

$$O_2 = \qquad\qquad O_{23} =$$

1.2 Matrices carrées particulières

Définition 3 *Soit une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

(1) A est une **matrice triangulaire supérieure** *lorsque: $\forall i, j$, si $i > j$, $a_{ij} = 0$.*

(2) A est une **matrice triangulaire inférieure** *lorsque: $\forall i, j$, si $i < j$, $a_{ij} = 0$.*

(3) A est une **matrice diagonale** *lorsque: $\forall i \neq j$, $a_{ij} = 0$.*

A est aussi notée $A = diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Exemple 4 : en d'autres termes,

(1) Une matrice triangulaire supérieure n'a que des zéros ...... sa diagonale:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(2) Une matrice triangulaire inférieure n'a que des zéros ...... de sa diagonale:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1-j & 0 \\ \ln 4 & e^3 & -20 \end{pmatrix}$$

(3) Une matrice diagonale n'a que des zéros de part et d'autre de sa diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Remarque 2 Il peut y avoir des zéros sur la diagonale!

Exemple 5

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Définition 4 *On appelle* **matrice identité (ou matrice unité) d'ordre** *n, notée $\boxed{I_n}$, la matrice carrée d'ordre n diagonale:*

$$I_n = diag(1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Définition 5 *Soit une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

(1) On dit que A est **symétrique** *lorsque $\forall i, j$, $a_{ij} = a_{ji}$.*

L'ensemble des matrices symétriques est noté $\boxed{\mathcal{S}_n(\mathbb{K})}$

(2) On dit que A est **antisymétrique** *lorsque $\forall i, j$, $a_{ij} = -a_{ji}$.*

L'ensemble des matrices antisymétriques est noté $\boxed{\mathcal{A}_n(\mathbb{K})}$

Exemple 6 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique et $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

A noter que les matrices antisymétriques ont (forcément) tous leurs coefficients diagonaux nuls.

2 Opérations matricielles

2.1 Egalité

Définition 6 *On dit que deux matrices A et B sont* **égales** *si elles sont de même taille et ont les mêmes coefficients.*

2.2 Addition, multiplication par un scalaire

2.2.1 Addition

Définition 7 *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.*
La **somme de** *A* **et** *B, notée $A+B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie par:* $\boxed{A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}}$

Remarque 3 : ATTENTION! On ne peut additionner que des matrices DE MÊME TAILLE!
A retenir: $\boxed{\text{Matrice } n,p + \text{scalaire=HORREUR}}$ Ne jamais écrire $A+1$!!!

Exemple 7

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&-2&-\frac{1}{4}\\0&1&-2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&-i&-5\\0&-2&1\end{pmatrix}$$

Que peut-on dire des sommes $A+B$ et $A+C$?
Par ailleurs: la somme $B+C$ est-elle possible? Si oui, préciser la taille et les coefficients de la matrice $B+C$.

Proposition 1 *Soient trois matrices $A,B,C\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.*
(1) **Associativité:** $A+(B+C)=(A+B)+C$.
(2) **Élément neutre:** $A+O_{np}=O_{np}+A=A$.
O_{np} est l'élément neutre pour l'addition des matrices.
(3) **Opposé:** *définissons la matrice $-A=(-a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, qui est la* **matrice opposée de** *A.*
Alors $A+(-A)=(-A)+A=O_{np}$.
(4) **Commutativité:** $A+B=B+A$.

2.2.2 Multiplication par un scalaire

Définition 8 *Soient A une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.*
Le **produit de** *λ* **et** *A, noté λA est la matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie par:* $\boxed{\lambda A=(\lambda\, a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}}$

Exemple 8 $A=\begin{pmatrix}0&1\\2&3\\-1&4\\5&6\end{pmatrix}$.

$2A=$. Et remarquons que $1\,A=$ $=A$ et $(-1)\,A=$ $=-A$ (opposé de A).

Proposition 2 *Soient $A,B\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$.*
(1) **Associativité:** $\lambda(\mu A)=(\lambda\,\mu)A=\underbrace{(\mu\,\lambda)}_{\text{commutent dans }\mathbb{K}}A=\mu(\lambda A)$.
(2) **Élément neutre:** $1\,A=A$.
(3) **Distributivité:** $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ *et* $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

Proposition 3 *$\forall A,B\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}$,*
(1) $(-1)A=-A$ *donc on note:* $A+(-B)=A-B$.
(2) $\lambda(-A)=(-\lambda)A=-\lambda A$.
(3) $\lambda(A-B)=\lambda A-\lambda B$ *et* $(\lambda-\mu)A=\lambda A-\mu A$.

2.3 Produit matriciel

2.3.1 Définition et propriétés

Définition 9 *Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$,* **le produit de** A **et** B*, noté $A \times B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ définie par:*

$$\boxed{AB = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant q}} \text{ où } c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{ip}\, b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}}$$

Mise en pratique:

Remarque 4 ATTENTION! le produit de deux matrices n'est pas toujours possible!
Le produit $A\,B$ est possible si nb de colonnes de A = nb de lignes de B!

Exemple 9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R}) \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{34}(\mathbb{R})$$

Le produit AB est-il possible? Si oui, donner sa taille et le calculer.

Exemple 10 : cas particuliers: matrice ligne et matrice colonne.

On note $L = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_p) \in \mathcal{M}_{1p}(\mathbb{K})$ et $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q1}(\mathbb{K})$.

(1) **Produit** LC**:** le produit est possible ssi ...... et dans ce cas, $LC \in$ ......, i.e. LC est un scalaire:

$$\boxed{LC = \sum_{k=1}^{p} a_k\, b_k \in \mathbb{K}}$$

Exemple: $(1\ 2\ 3) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \ldots\ldots.$

(2) **Produit** CL**:** le produit est toujours possible! $CL \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K})$ et a pour coefficients: $\boxed{c_{ij} = b_i\, a_j}$

Exemple: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times (-1\ 0\ 2\ 3) = \qquad\qquad = \begin{pmatrix} 1 \times L \\ 2 \times L \\ 3 \times L \end{pmatrix}$.

Donc $CL = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} (a_1\ a_2\ \ldots\ a_p) = \ldots\ldots.$

***Proposition 4* :**

(1) Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

(2) Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale et:
$diag(a_1, \ldots, a_n) \times diag(b_1, \ldots, b_n) = diag(a_1\, b_1, \ldots, a_n\, b_n)$.

Remarque 5 Cette proposition est plus utile qu'on ne le pense!
Quand on effectue le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures), (1) nous dit qu'il n'est donc pas nécessaire de *calculer* les coefficients sous (resp. sur) la diagonale : ils sont nuls!!

Preuve:

$\blacksquare$

Proposition 5 *Soient $A, E \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$, $B, D \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{K})$. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,*
(1) $A(\lambda B) = \lambda(AB) = (\lambda A)B$.
(2) **Associativité:** *$A(BC) = (AB)C$.*
(3) **Distributivité:** *$A(B + D) = AB + AD$ et $(A + E)D = AD + ED$.*
(4) **Élément neutre:** *$AI_n = I_pA = A$ (attention à la taille de la matrice unité).*

Preuve: (1) Exercice.

■

Remarque 6 : ATTENTION AUX PIÈGES DU PRODUIT MATRICIEL!
(1) **LE PRODUIT NE COMMUTE PAS!!**

Exemple 11 : Si AB est calculable, parfois BA ne l'est pas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R}) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Que dire des produits AB et BA? , donc $AB \neq BA$...

Exemple 12 : Si AB et BA sont calculables, parfois, ils n'ont pas la même taille.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R}) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R}).$$

$AB \in \ldots\ldots$ mais $BA \in \ldots\ldots$ donc $AB \neq BA$...

Exemple 13 : Si AB et BA sont calculables et de même taille, ils n'ont pas forcément les mêmes coefficients.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Alors $AB =$ et $BA =$ donc $AB \neq BA$.

(2) $\boxed{AB = O \not\Rightarrow A = O \text{ ou } B = 0!}$
En d'autres termes, la phrase "un produit de facteurs est nul ssi l'un des facteurs est nul" est FAUSSE chez les matrices... (voir exemple 12: $AB = O_2$)
(3) **ON NE PEUT PAS SIMPLIFIER PAR A MÊME SI A EST NON NULLE !!** $AB = AC \not\Rightarrow B = C$**!**
Contre-exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.
Calculer AB et AC:

Et pourtant $B \neq C$!

2.3.2 Puissances d'une matrice carrée

Remarque 7 :
(1) Remarquons tout d'abord que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le produit est bien défini mais il reste non commutatif! C'est-à-dire: $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, AB et BA sont TOUJOURS possibles mais on n'a pas forcément $AB = BA$...
(2) $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a un élément neutre pour le produit: c'est la matrice identité I_n:

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \ AI_n = I_n A = A.$$

Définition 10 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les* **puissances de** *A sont définies par récurrence:*

$$\boxed{A^0 = I_n \text{ et } \forall p \in \mathbb{N},\ A^{p+1} = A^p\, A = A\, A^p}$$

Proposition 6 *$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,*
(1) $\forall p \in \mathbb{N}$, $I_n^p = I_n$.
(2) $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $A^p\, A^q = A^{p+q} = A^q\, A^p$ et $(A^p)^q = A^{pq} = (A^q)^p$.
(3) $\forall p \in \mathbb{N}$, $(\lambda\, A)^p = \lambda^p\, A^p$.

Exemple 14 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
S'il existe un entier m tel que $A^m = O$ alors $\forall p \geqslant m$, $A^p = O$. On dit que la matrice A est *nilpotente*.
(on a en effet: $\forall p \geqslant m$, $A^p = A^m\, A^{p-m} = O\, A^{p-m} = O$)
Cas particulier à reconnaître: les matrices triangulaires à diagonale nulle.
Par exemple, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les puissances successives de J "décalent le triangle":

$$J^2 = \qquad\qquad\qquad J^3 = \qquad\qquad\qquad J^4 = O\,.$$

POINT MÉTHODE 1 : trois méthodes pour calculer les puissances d'une matrice.

1. *La récurrence:*

   ***Proposition 7* (puissances d'une matrice DIAGONALE):**

   $$\forall p \in \mathbb{N}\,,\ \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a_1^p & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^p \end{pmatrix}$$

   Preuve:

   ■

2. *Le binôme de Newton:*

   Rappel 1 (formule du binôme de Newton):
   Pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent $\boxed{AB = BA}$:

   $$\forall p \in \mathbb{N}\,,\ (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}\,.$$

   Remarque 8 ATTENTION! Cette formule est fausse si les matrices ne commutent pas!
   Par exemple, si $AB \neq BA$ alors on n'a pas l'égalité remarquable: $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$!
   En effet, $(A+B)^2 = (A+B)\,(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$...

3. *"diagonalisation":* surtout au programme de l'année prochaine...

2.4 Transposition

Définition 11 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$: $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.*

On appelle **transposée de** *A, notée $\boxed{A^T}$, la matrice de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ définie par:*

$$A^T = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}},\ \text{où } \forall i,j,\ b_{ij} = a_{ji}$$

Exemple 15 En d'autres termes, la ligne k devient la colonne k et vice-versa:

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 2 & 3 & j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{C}) \text{ donc } A^T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{C}).$$

Remarque 9 :
(1) $(A^T)^T = A$.
(2) Si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale alors $D^T = D$.
(3) Si $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure (resp. inférieure) alors T^T est triangulaire inférieure (resp. supérieure).

Proposition 8 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
(1) A est symétrique ssi $A^T = A$.
(2) A est antisymétrique ssi $A^T = -A$.

Preuve:

■

Proposition 9 **(linéarité):** $\forall A, B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,
(1) $(A+B)^T = A^T + B^T$.
(2) $(\lambda A)^T = \lambda\, A^T$.

Remarque 10 (1) et (2) est équivalent à: $\boxed{(\lambda A + B)^T = \lambda\, A^T + B^T}$

Preuve:

■

Proposition 10 $\forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{K})$,

$$(AB)^T = B^T A^T \ \textit{(attention à l'ordre des matrices!)}$$

Donc, si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ (matrice carrée), $\forall n \in \mathbb{N}$, $(A^T)^n = (A^n)^T$.

Preuve:

$\blacksquare$

3 Matrices inversibles

Introduction:

$*$ Dans $\mathbb{K}$, un produit de facteurs est nul ssi l'un au moins des facteurs est nul: on dit que $\mathbb{K}$ est *intègre*.
Ce qui entraîne: *si* $z \neq 0$ alors $z\,u = z\,v \Rightarrow u = v$. En effet:
$z\,u = z\,v \iff z\,(u - v) = 0 \iff u - v = 0$, puisque z est non nul.
Mais pourquoi l'ensemble $\mathbb{K}$ est-il intègre? Regardons pour cela la preuve de $z_1\,z_2 = 0 \iff z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$.
Le sens réciproque est clair. Pour le sens direct: si $z_1 \neq 0$ alors on peut ...... par z_1:

Et de même par symétrie, si $z_2 \neq 0$ alors $z_1 = 0$.
Qu'avons-nous utilisé?

En d'autres termes: si $z \neq 0$, il existe un unique nombre noté $z^{-1} \in \mathbb{K}^*$ tel que $z\,z^{-1} = z^{-1}\,z = 1$. En fait, $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$!
$*$ Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: ce n'est plus vrai! Nous avons vu dans la partie 2.3.1 traitant du produit matriciel que:
- L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre: $AB = O \not\Rightarrow A = O$ ou $B = O$.
- Même si A est une matrice non nulle, on ne peut pas simplifier par A: $AB = AC \not\Rightarrow B = C$.

Pourquoi?

En d'autres termes: si $A \neq 0$, il n'existe pas forcément une unique matrice notée $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que
$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_n$...

Définition 12 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
On dit que A est **inversible** *s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que: $AB = BA = I_n$.*
La matrice B est alors unique et appelée **inverse de** *A, on le note* $\boxed{A^{-1}}$
L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\boxed{GL_n(\mathbb{K})}$

Remarque 11 :
(1) Preuve de l'unicité de l'inverse (quand il existe):

(2) **ATTENTION! NE JAMAIS NOTER** $A^{-1} = \dfrac{1}{A}$**!!**

Remarque 12 :
(1) La matrice nulle n'est JAMAIS inversible!
(2) **ATTENTION!** Même si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non nulle, A^{-1} n'existe pas forcément!
Par exemple:

$\boxed{\text{si } A \text{ et } B \text{ sont deux matrices non nulles de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ telles que } AB = O \text{ alors ni } A \text{ ni } B \text{ ne sont inversibles}}$

En effet:

(3) I_n est TOUJOURS inversible et $\boxed{I_n^{-1} = I_n}$

(4) *Rappel:* Soient A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $AB = AC \not\Rightarrow B = C$.
MAIS SI A est inversible, cela devient vrai: $AB = AC \Rightarrow B = C$.
Preuve: Puisque A est inversible, ...

(attention: le produit n'est pas commutatif, on multiplie donc les deux membres soit à gauche, soit à droite!! Le plus judicieux ici est bien-sûr à gauche)
Donc $B = C$.

■

Proposition 11 *Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

(1) Si A est inversible alors A^{-1} est inversible et $\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$

(2) $\lambda \in \mathbb{K}$. Si A est inversible et $\lambda \neq 0$ alors (λA) est inversible et $\boxed{(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}}$

(3) Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}}$ *(attention à l'ordre des matrices!)*

(4) A est inversible ssi ${}^tA$ est inversible et $\boxed{({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})}$

Preuve:

$\blacksquare$

POINT MÉTHODE 2 : Comment montrer qu'une matrice est inversible et calculer son inverse?

1. **Utilisation d'un polynôme matriciel:**

   Exemple 16 Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Elle vérifie $M^2 + M - 2I = \ldots$.

   On isole I et on factorise par M pour exhiber une matrice B telle que $MB = BM = I$. Dans ce cas, $B = M^{-1}$!
   Retour à l'exemple:

   Et de même, $\underbrace{\left(\frac{1}{2}(M+I)\right)}_{B!} M = I$.

   Conclusion: M est inversible et $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{2}(M+I)}$

2. **Utilisation d'un système linéaire:** voir le chapitre correspondant.

3. **Cas particulier des matrices carrées d'ordre deux:**

   Définition 13 *Soit une matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. *On appelle* **déterminant de** A, *noté* $\boxed{\det A \text{ ou } |A|}$ *le scalaire défini par:*

   $$\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc}$$

   Exemple 17 :
   (1) $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, donc $\det A = \ldots$
   (2) $A_m = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 2 & m+1 \end{pmatrix}$ donc $\det A_m = \ldots$

   Proposition 12 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

   A est inversible ssi $\det A \neq 0$, *et dans ce cas:* $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

   Preuve:

■

Exemple 18 :
(1) $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ i & 1 \end{pmatrix}$. $\det A = \ldots$ donc A est-elle inversible?
(2) $A_m = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 2 & m+1 \end{pmatrix}$.
A_m est inversible ssi $\det A_m \neq 0$ ssi ....
Dans ce cas, calculer A_m^{-1}: