Suites $u_{n+1} = f(u_n)$ – étude par monotonie

Exercice 1 On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln x$. Soit u la suite définie par $u_0 \geqslant 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que la suite u est bien définie et qu'elle est minorée par 1.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[1, +\infty[$.
3. Étudier la monotonie de u.
4. En déduire que (u_n) est convergente, et donner sa limite.

Exercice 2 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}$.

1. Étudier f sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer le signe de $f(x) - x$, pour tout réel $x \geqslant 1$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 1$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n = 1$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 :

1. Étudier la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$
2. On définie la suite (u_n) par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 4 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. On prend $u_0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (a) Étudier le signe de $\sin(x) - x$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) Étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On prend $u_0 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$. De même, étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5 :
Étudier la suite (u_n) (définition, monotonie, convergence) définie par: $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

Exercice 6 Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que (u_n) est croissante et qu'elle ne converge pas. En déduire sa limite.

Exercice 7 On considère la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = e^x - 1$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.

1. (a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose dans cette question que $u_0 < 0$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante
   (c) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. On suppose maintenant que $u_0 = 1$
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante
   (c) En déduire la limite de (u_n)