Calcul matriciel

I. Calcul matriciel.

Exercice 1 Expliciter la matrice A dans les cas suivants:

(a) $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij}=i-j+1$. (b) $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{4}(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij}=\max(i,j)$

Exercice 2 Soient les matrices $A\in\mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R})$, $B\in\mathcal{M}_{5,3}(\mathbb{R})$, $C\in\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$ et $D\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Parmi les opérations suivantes, précisez celles qui sont permises et le format des résultats:

$$B\,A \qquad A\,(B+C) \qquad A\,B\,D \qquad A\,C+B\,D \qquad A\,B\,A\,B\,D\,.$$

Exercice 3 On donne les matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&-1\end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

Lorsqu'ils existent, effectuer tous les produits de ces matrices deux à deux.
On pourra présenter les résultats sous forme d'un tableau à deux entrées.

Exercice 4 Lorsqu'ils sont définis, calculer les produits AB et BA dans chacun des cas suivants:

1. $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
2. $A=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&1&0\\-1&-2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$
3. $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\\0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\2&1&0&0\end{pmatrix}$

Exercice 5 Soient $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définies par :

$$A=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix}$$

Comparer les deux matrices $(A+B)^2$ et $A^2+2\,AB+B^2$. Puis comparer les deux matrices $(A+B)^2$ et $A^2+AB+BA+B^2$.

II. Équations matricielles.

Exercice 6 :

1. On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&2\\0&4\end{pmatrix}$.
   Résoudre l'équation $A-3\,X=2\,B$ d'inconnue $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que:

$$A+B=\begin{pmatrix}2&1\\2&5\end{pmatrix}\text{ et }A-B=\begin{pmatrix}0&3\\4&3\end{pmatrix}.$$

Exercice 7 Résoudre l'équation $X^2-2X=\begin{pmatrix}-1&0\\6&3\end{pmatrix}$ d'inconnue $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8 Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire telles que $AM = MA$.

Exercice 9 Déterminer les matrices triangulaires supérieures T de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $T^2 = I_2$.

Exercice 10 Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = B$ d'inconnue X.

III. Matrices inversibles.

Exercice 11 On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.
Calculer $A^T A$ et B^2. Qu'en conclure?

Exercice 12 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & -8 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, B^2. En déduire que A et B sont inversibles et donner leur inverse.
2. Calculer AB et BA.
3. Montrer que AB est inversible et déterminer son inverse.
4. Est-ce-que $(AB)^2 = A^2 B^2$?

Exercice 13 Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $\left(2 I_n + B^{-1}\right) B + A \left(B - A^{-1} + 2 A^{-1} B\right) - AB$
2. $A \left(7 I_n + A^{-1}\right) - B \left(5B^{-1} A + B^{-1} + A\right) + A \left(B - 2 I_n\right)$

Exercice 14 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Montrer que pour tout réel θ, $R(\theta)$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 15 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

1. A quelle condition la matrice A est-elle inversible? Déterminer son inverse dans ce cas.
2. Donner, lorsque A est inversible, une relation entre A^T et A^{-1}.

Exercice 16 Discuter selon le paramètre réel m l'inversibilité des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1-m \\ 1-m & 4m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2-m & 1 \\ 3 & -m \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 puis montrer que $A^3 - A^2 - A + I = 0$. en déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
2. Montrer que A^2 est inversible et calculer $(A^2)^{-1}$.

Exercice 18 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et $(A-4I)\left(A^2+2A-I\right)$.
   En déduire trois réels a, b, c tels que: $A^3+aA^2+bA+cI=O$.

2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse en fonction de I et des puissances de A.
   Expliciter A^{-1}.

Exercice 19 On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A+I_3)^3$.

2. En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A , A^2 et I_3.

Exercice 20 Soit la matrice $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $C^3-3\,C^2+2\,C=0$. En déduire que C n'est pas inversible.

Exercice 21 : Soit $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer B^3 et en déduire que B n'est pas inversible.

IV. Pour aller plus loin.

Exercice 22 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et les matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par leurs coefficients :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!]\,,\; a_{ij}=\binom{i-1}{j-1} \quad \text{et} \quad b_{ij}=2^i\,3^{j-i}$$

Calculer le coefficient d'indice i, j des matrices : $A \times B$ et B^2.

Exercice 23
1. Soit la matrice A carrée d'ordre n $(n \geqslant 2)$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   Calculer A^2 en fonction de n et A.

2. Soit B la matrice carrée d'ordre n $(n \geqslant 2)$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 sauf ceux de la diagonale qui sont tous nuls.
   En remarquant que $A=B+I_n$, en déduire que B est inversible et donner son inverse B^{-1} en fonction de n et B.

Exercice 24 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Développer $(I_n+A+\ldots+A^k)\,(I_n-A)$, où k est un entier non nul.

2. On suppose que A est une matrice nilpotente: il existe $r \geqslant 3$ tel que $A^r=O$.
   Montrer que (I_n-A) est inversible et exprimer son inverse en fonction de n et des puissances de A.

Exercice 25 Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. On note le complexe: $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\overline{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par:

$$\forall i \in [|1, n|]\,,\; \forall j \in [|1, n|]\,,\; [\overline{A}]_{ij}=\overline{[A]_{ij}}\,.$$

En d'autres termes, les coefficients de $\overline{A}$ sont les coefficients conjugués de A.
Par exemple, si $A=\begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ 5-3i & 2i \end{pmatrix}$ alors $\overline{A}=\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5+3i & -2i \end{pmatrix}$.

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, définie par:

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\; \forall j \in [\![1, n]\!]\,,\; [A]_{ij}=\omega^{(i-1)(j-1)}\,.$$

Calculer $A\,\overline{A}$.
En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.