

Calcul matriciel

I. Calcul matriciel.

Exercice 1 Expliciter la matrice A dans les cas suivants:

$$(a) A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R}) \text{ telle que } a_{ij} = i - j + 1. \quad (b) A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \text{ telle que } a_{ij} = \max(i, j)$$

Exercice 2 Soient les matrices $A \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{5,3}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Parmi les opérations suivantes, précisez celles qui sont permises et le format des résultats:

$$BA \quad A(B+C) \quad ABD \quad AC+BD \quad ABABD.$$

Exercice 3 On donne les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lorsqu'ils existent, effectuer tous les produits de ces matrices deux à deux.
On pourra présenter les résultats sous forme d'un tableau à deux entrées.

Exercice 4 Lorsqu'ils sont définis, calculer les produits AB et BA dans chacun des cas suivants:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5 Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Comparer les deux matrices $(A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$. Puis comparer les deux matrices $(A+B)^2$ et $A^2 + AB + BA + B^2$.

II. Équations matricielles.

Exercice 6 :

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Résoudre l'équation $A - 3X = 2B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } A - B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 Résoudre l'équation $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8 Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire telles que $AM = MA$.

Exercice 9 Déterminer les matrices triangulaires supérieures T de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $T^2 = I_2$.

Exercice 10 Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = B$ d'inconnue X .

III. Matrices inversibles.

Exercice 11 On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^T A$ et B^2 . Qu'en conclure?

Exercice 12 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & -8 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 , B^2 . En déduire que A et B sont inversibles et donner leur inverse.
2. Calculer AB et BA .
3. Montrer que AB est inversible et déterminer son inverse.
4. Est-ce-que $(AB)^2 = A^2 B^2$?

Exercice 13 Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $(2I_n + B^{-1})B + A(B - A^{-1} + 2A^{-1}B) - AB$
2. $A(7I_n + A^{-1}) - B(5B^{-1}A + B^{-1} + A) + A(B - 2I_n)$

Exercice 14 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Montrer que pour tout réel θ , $R(\theta)$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 15 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

1. A quelle condition la matrice A est-elle inversible? Déterminer son inverse dans ce cas.
2. Donner, lorsque A est inversible, une relation entre A^T et A^{-1} .

Exercice 16 Discuter selon le paramètre réel m l'inversibilité des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1-m \\ 1-m & 4m \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2-m & 1 \\ 3 & -m \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 , A^3 puis montrer que $A^3 - A^2 - A + I = 0$. en déduire que A est inversible et donner A^{-1} .
2. Montrer que A^2 est inversible et calculer $(A^2)^{-1}$.

Exercice 18 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 et $(A - 4I)(A^2 + 2A - I)$.
En déduire trois réels a, b, c tels que: $A^3 + aA^2 + bA + cI = O$.
- En déduire que A est inversible et déterminer son inverse en fonction de I et des puissances de A .
Expliciter A^{-1} .

Exercice 19 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

- Calculer $(A + I_3)^3$.
- En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A , A^2 et I_3 .

Exercice 20 Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $C^3 - 3C^2 + 2C = 0$. En déduire que C n'est pas inversible.

Exercice 21 : Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer B^3 et en déduire que B n'est pas inversible.

IV. Pour aller plus loin.

Exercice 22 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et les matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par leurs coefficients :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{ij} = \binom{i-1}{j-1} \text{ et } b_{ij} = 2^i 3^{j-i}$$

Calculer le coefficient d'indice i, j des matrices : $A \times B$ et B^2 .

Exercice 23 1. Soit la matrice A carrée d'ordre n ($n \geq 2$) dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Calculer A^2 en fonction de n et A .

- Soit B la matrice carrée d'ordre n ($n \geq 2$) dont tous les coefficients sont égaux à 1 sauf ceux de la diagonale qui sont tous nuls.
En remarquant que $A = B + I_n$, en déduire que B est inversible et donner son inverse B^{-1} en fonction de n et B .

Exercice 24 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Développer $(I_n + A + \dots + A^k)(I_n - A)$, où k est un entier non nul.
- On suppose que A est une matrice nilpotente: il existe $r \geq 3$ tel que $A^r = O$.
Montrer que $(I_n - A)$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de n et des puissances de A .