Puissances d'une matrice carrée

BCPST 1C – Mme MOREL

Soit une matrice carrée d'ordre n, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Le but de ce chapitre est de calculer les puissances de A (A^p, pour tout $p \in \mathbb{N}$), et d'appliquer ce calcul aux suites matricielles.
Cette année, on distinguera deux méthodes pour le calcul de A^p, une autre méthode sera vue en deuxième année: celle utilisant la diagonalisation d'une matrice.

1 Première méthode: par récurrence

1.1 Raisonner par récurrence

On peut, en calculant les premières puissances, **conjecturer** une formule que l'on démontre ensuite par récurrence.

Exemple 1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
$*$ Calculer A^2 en fonction de A:

$*$ Calculer A^3 SANS UTILISER LES COEFFICIENTS DE A (mais la relation précédente):

$*$ Peut-on conjecturer une relation donnant A^n en fonction de n et A? Est-elle valable pour $n = 0$?

$*$ Montrons le résultat par récurrence:

On remarquera que dans les calculs, on utilise la relation établie pour A^2.

CAPACITÉ 1 : calcul de A^n ($n \in \mathbb{N}$) par récurrence.
• **Étape 1:** Calculer les premières puissances (A^2, puis A^3 ou A^4 si nécessaire) en fonction de A et n.
ATTENTION!!
(1) Il est impératif d'exprimer A^2, A^3, voire A^4 en fonction de A pour pouvoir conjecturer une relation entre A^n, A et n.
(2) SEUL le calcul de A^2 utilise les coefficients de A, mais (en général) pas celui de A^3 et des puissances suivantes
Objectif de cette étape: on doit pouvoir déterminer intuitivement une relation entre A^n, n et A pour tout entier $n \geqslant$??? (ATTENTION AU PREMIER RANG!)
• **Étape 2:** Preuve par récurrence de la conjecture de l'étape 1.
(A noter que le calcul de A^2 de l'étape 1. sert à prouver l'hérédité)

1.2 Récurrence en utilisant un polynôme annulateur

Exemple 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$*$ Déterminer une relation entre A^2, A et I.

$*$ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que: $A^n = a_n\, A + b_n\, I$.

$*$ Expliciter A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on reconnaîtra une suite récurrente linéaire d'ordre deux).

POINT METHODE 1 : en trois étapes.
• **Étape 1:** Déterminer une relation polynômiale entre les *premières* puissances de A (jusqu'à A^3 si nécessaire)
• **Étape 2:** Généralisation par récurrence.
ATTENTION!!

(1) On démontre **l'existence** de deux suites (a_n) et (b_n).

(2) L'hérédité ne donne pas une expression directe de a_n et b_n en fonction de n, mais une *relation de récurrence pour chaque suite.*

• **Étape 3:** Calculer a_n et b_n en fonction de n.

2 Deuxième méthode: développer avec le binôme de Newton

POINT METHODE 2 :
Si A s'écrit comme la somme de deux matrices: $A = B + C$ qui **COMMUTENT** $\boxed{BC = CB}$, penser au binôme de Newton:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\, A^n = (B+C)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k C^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C^k B^{n-k}\,.$$

On rappelle le choix judicieux de la puissance...

2.1 Capacité exigible: calcul des puissances de $A = \alpha\, I + J$, où $\alpha \in \mathbb{K}$ et J est une matrice nilpotente

Questions:

1. Peut-on appliquer le binôme de Newton? Justifier.
2. Qui "porte" la puissance k? $n-k$?
3. Écrire la formule. Que remarque-t-on?

Exemple 3 Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$*$ $A = I + J$, avec $J = \ldots$

$*$ $J^2 = \ldots$ Donc $\forall k \geqslant 2$, $J^k = \ldots$

$*$ Pour tout entier n, $A^n = \ldots$

2.2 Calcul des puissances de $A = \alpha\, I + B$, où $\alpha \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quelconque

Questions:

1. Peut-on appliquer le binôme de Newton? Justifier.
2. Qui "porte" la puissance k? $n-k$?
3. Écrire la formule. Que remarque-t-on?

Exemple 4 (reprise de l'exemple 1.)
On se donne les matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $A = I + B$.
On rappelle (exemple 1) que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B^n = 7^{n-1}\, B$

2.3 Capacité exigible: calcul des puissances de $A = L + M$, où $LM = ML = 0$

Questions:

1. Peut-on appliquer le binôme de Newton? Justifier.
2. Qui "porte" la puissance k? $n-k$?
3. Écrire la formule. Que remarque-t-on?

Exemple 5 Soient les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. $L^2 = \ldots$ et $M^2 = \ldots$

   Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ L^n = \ldots$ et $M^n = \ldots$

2. $LM = \ldots$ et $ML = \ldots$

3. Or $A = L - M$,donc pour tout entier n, $A^n = \dots$

3 Application aux suites matricielles

Exemple 6 On considère deux suites (x_n) et (y_n) définies par leur premier terme x_0, y_0 et la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \left\{ \begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \frac{1}{2}\,x_n + \quad \frac{1}{2}\,y_n \\ y_{n+1} & = & \qquad\quad \frac{1}{2}\,y_n \end{array} \right.$$

$*$ **Étape 1: écriture matricielle.**
Pour tout n, on pose $V_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = A\,V_n$.

$*$ **Étape 2: récurrence pour exprimer V_n en fonction de n.**
On reconnaît une suite géométrique mais matricielle... La même formule que pour les suites géométriques usuelles s'applique, par contre, il faut refaire PROPREMENT la preuve par récurrence:

Remarque 1 On n'a pas besoin de connaître A^n dans cette preuve!!!

$*$ **Étape 3: calcul des puissances de A**
Reprise de l'exemple 3:

$*$ **Étape 4: Revenir aux coefficients.**
$\forall n \in \mathbb{N}$,
$V_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} x_n = \dots \\ y_n = \dots \end{array} \right.$