

Puissances matricielles

I. Récurrence et conjecture

Exercice 1 Calculer les puissances des matrices suivantes:

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose: $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta')$, pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. En déduire $(R(\theta))^n$, pour tout entier naturel n .
2. En déduire une expression de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 Soit la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer U^2 et U^3 . Pour tout $n \geq 2$, exprimer U^n en fonction de U^2 .

II. Récurrence et polynôme annulateur

Exercice 4 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 = 3A - 2I_3$.
2. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels α_n et β_n tels que: $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$. Préciser α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n .
3. (a) Montrer que (α_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre deux.
(b) En déduire α_n puis β_n en fonction de n .
4. Pour tout entier n , exprimer A^n en fonction de A , I_3 et n .

Exercice 5 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que : $A^2 = aA + bI$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$.
3. En déduire A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

III. Binôme de Newton

Exercice 6 Calculer les puissances des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{K}) \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{C})$$

Exercice 7 On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice J telle que $A = I + J$, puis calculer J^2 , J^3 , et en déduire J^n , pour tout entier naturel $n \geq 3$.
2. Calculer A^n , pour tout entier $n \geq 2$.

Exercice 8 Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I$.

1. Exprimer B^2 en fonction de B et en déduire B^n pour tout entier n .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $A^n = 2^n I + \frac{5^n - 2^n}{3} B$.

Exercice 9 Soient les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et BA .
2. Calculer A^2 et B^2 .
3. En déduire les puissances de A et B .
4. En remarquant que $C = B - A$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $C^n = B - (-2)^{n-1} A$.

IV. Suites matricielles

Exercice 10 On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 1$ et $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 6u_n - v_n \text{ et } v_{n+1} = u_n + 4v_n.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice carrée A d'ordre deux telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
2. On note la matrice $J = A - 5I$. Calculer J^2 et en déduire les puissances de J .
3. Donner une expression de A^n en fonction de n , pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire u_n et v_n en fonction de n .

Exercice 11 On considère deux suites (r_n) et (v_n) définies par: $r_0 = 1$ et $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$r_{n+1} = \frac{3}{5}r_n + \frac{1}{3}v_n \text{ et } v_{n+1} = \frac{2}{5}r_n + \frac{2}{3}v_n.$$

1. Déterminer une matrice carrée A d'ordre 2 telle que $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer deux matrices B et C telles que $\begin{cases} B + C = I \\ B + \frac{4}{15}C = A \end{cases}$
3. Calculer B^2 , C^2 , BC et CB .
4. Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
5. En déduire les valeurs de r_n et v_n en fonction de n , r_0 et v_0 puis leurs limites éventuelles.