Puissances matricielles

I. Récurrence et conjecture

Exercice 1 Calculer les puissances des matrices suivantes:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad J(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{K}$.

Exercice 2 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose: $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta')$, pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. En déduire $(R(\theta))^n$, pour tout entier naturel n.
2. En déduire une expression de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 Soit la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer U^2 et U^3. Pour tout $n \geqslant 2$, exprimer U^n en fonction de U^2.

II. Récurrence et polynôme annulateur

Exercice 4 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 = 3A - 2I_3$.
2. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels α_n et β_n tels que: $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$.
   Préciser α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n.
3. (a) Montrer que (α_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre deux.
   (b) En déduire α_n puis β_n en fonction de n.
4. Pour tout entier n, exprimer A^n en fonction de A, I_3 et n.

Exercice 5 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que : $A^2 = aA + bI$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$.
3. En déduire A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

III. Binôme de Newton

Exercice 6 Calculer les puissances des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix} \ (x, y \in \mathbb{K}) \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ (a \in \mathbb{C})$$

Exercice 7 On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice J telle que $A = I + J$, puis calculer J^2, J^3, et en déduire J^n, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.
2. Calculer A^n, pour tout entier $n \geqslant 2$.

Exercice 8 Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I$.

1. Exprimer B^2 en fonction de B et en déduire B^n pour tout entier n.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $A^n = 2^n I + \dfrac{5^n - 2^n}{3} B$.

Exercice 9 Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on définit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

On note les matrices $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer M en fonction de a, I et J.
2. Déterminer J^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression de M^n pour tout entier n de $\mathbb{N}$.

Exercice 10 Soient les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et BA.
2. Calculer A^2 et B^2.
3. En déduire les puissances de A et B.
4. En remarquant que $C = B - A$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $C^n = B - (-2)^{n-1} A$.

IV. Suites matricielles

Exercice 11 On considère deux suites (r_n) et (v_n) définies par: $r_0 = 1$ et $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$r_{n+1} = \frac{3}{5} r_n + \frac{1}{3} v_n \text{ et } v_{n+1} = \frac{2}{5} r_n + \frac{2}{3} v_n .$$

1. Déterminer une matrice carrée A d'ordre 2 telle que $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

   En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer deux matrices B et C telles que $\begin{cases} B + C = I \\ B + \frac{4}{15} C = A \end{cases}$

3. Calculer B^2, C^2, $B\,C$ et $C\,B$.

4. Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

5. En déduire les valeurs de r_n et v_n en fonction de n, r_0 et v_0 puis leurs limites éventuelles.

Exercice 12 On envisage la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice J telle que $A = 2I_3 + J$.
   Calculer J^2 et J^3. En déduire A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. On considère trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par leur premier terme x_0, y_0 et z_0 et la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \left\{ \begin{array}{lcl} 2x_{n+1} & = & x_n + 3y_n \\ 2y_{n+1} & = & y_n + 2z_n \\ 2z_{n+1} & = & z_n \end{array} \right.$$

   Déterminer x_n, y_n et z_n en fonction de n et de x_0, y_0 et z_0. Les suites (x_n), (y_n) et (z_n) sont-elles convergentes?

Exercice 13 On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = -1$ et les relations:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & -u_n + 2v_n - w_n \\ v_{n+1} & = & -v_n + 2w_n \\ w_{n+1} & = & -w_n \end{array} \right.$$

1. On définit la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
   Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = A\,X_n$.

2. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire une expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.