

Puissances matricielles

I. Récurrence et conjecture

Exercice 1 Calculer les puissances des matrices suivantes:

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose: $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta')$, pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. En déduire $(R(\theta))^n$, pour tout entier naturel n .
2. En déduire une expression de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 Soit la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer U^2 et U^3 . Pour tout $n \geq 2$, exprimer U^n en fonction de U^2 .

II. Récurrence et polynôme annulateur

Exercice 4 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 = 3A - 2I_3$.
2. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels α_n et β_n tels que: $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$. Préciser α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n .
3. (a) Montrer que (α_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre deux.
(b) En déduire α_n puis β_n en fonction de n .
4. Pour tout entier n , exprimer A^n en fonction de A , I_3 et n .

Exercice 5 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que : $A^2 = aA + bI$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$.
3. En déduire A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

III. Binôme de Newton

Exercice 6 Calculer les puissances des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{K}) \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{C})$$

Exercice 7 On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

- Déterminer la matrice J telle que $A = I + J$, puis calculer J^2 , J^3 , et en déduire J^n , pour tout entier naturel $n \geq 3$.
- Calculer A^n , pour tout entier $n \geq 2$.

Exercice 8 Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I$.

- Exprimer B^2 en fonction de B et en déduire B^n pour tout entier n .
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $A^n = 2^n I + \frac{5^n - 2^n}{3} B$.

Exercice 9 Soient les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer AB et BA .
- Calculer A^2 et B^2 .
- En déduire les puissances de A et B .
- En remarquant que $C = B - A$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $C^n = B - (-2)^{n-1} A$.

IV. Suites matricielles

Exercice 10 On considère deux suites (r_n) et (v_n) définies par: $r_0 = 1$ et $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$r_{n+1} = \frac{3}{5} r_n + \frac{1}{3} v_n \text{ et } v_{n+1} = \frac{2}{5} r_n + \frac{2}{3} v_n.$$

- Déterminer une matrice carrée A d'ordre 2 telle que $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

- Déterminer deux matrices B et C telles que $\begin{cases} B + C = I \\ B + \frac{4}{15} C = A \end{cases}$
- Calculer B^2 , C^2 , BC et CB .
- Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
- En déduire les valeurs de r_n et v_n en fonction de n , r_0 et v_0 puis leurs limites éventuelles.

Exercice 11 On envisage la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Déterminer la matrice J telle que $A = 2I_3 + J$.
Calculer J^2 et J^3 . En déduire A^n pour tout n de \mathbb{N} .
- On considère trois suites (x_n) , (y_n) et (z_n) définies par leur premier terme x_0 , y_0 et z_0 et la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} 2x_{n+1} = x_n + 3y_n \\ 2y_{n+1} = y_n + 2z_n \\ 2z_{n+1} = z_n \end{cases}$$

Déterminer x_n , y_n et z_n en fonction de n et de x_0 , y_0 et z_0 . Les suites (x_n) , (y_n) et (z_n) sont-elles convergentes?

Exercice 12 On considère les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = -1$ et les relations:

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -u_n + 2v_n - w_n \\ v_{n+1} &= -v_n + 2w_n \\ w_{n+1} &= -w_n \end{cases}$$

1. On définit la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = A X_n$.

2. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression de u_n , v_n et w_n en fonction de n .