Matrices et systèmes linéaires

BCPST 1C – Mme MOREL

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les **scalaires**.

1 Écriture matricielle d'un système linéaire

Exemple 1 On considère le système linéaire:

$$(\mathcal{S}_1) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ -3x + 2y + z = -1 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

On veut écrire $(\mathcal{S}_1)$ sous la forme matricielle: $A\,X = B$, où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $X, B \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$.
On pose les matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer le produit $A\,X$. Que remarquez-vous?

Définition 1 **(Généralisation):** *A tout système linéaire n lignes, p colonnes*

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1p}\,x_p = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2p}\,x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{np}\,x_p = b_n \end{cases}$$

on associe:

- *la matrice colonne des inconnues:* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$,
- *la matrice colonne du second membre:* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$,
- **la matrice associée au système:** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1p} \\ & & \vdots & & \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{ip} \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

  A retenir:

  → *la $i^{\text{ième}}$ ligne de A contient les coefficients de la $i^{\text{ième}}$ équation (ligne) de $(\mathcal{S})$.*

  → *la $j^{\text{ième}}$ colonne de A contient les coefficients de la $j^{\text{ième}}$ inconnue (colonne) de $(\mathcal{S})$.*

Alors:

$$(\mathcal{S}) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ & & \vdots & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} \iff A\,X = B$$

Exemple 2 Écrire les systèmes linéaires suivants matriciellement ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

$$(\mathcal{S}_1) \quad \left\{ \begin{array}{rcrl} 5x & - & 4y & = a \\ 2x & - & y & = b \end{array} \right. \qquad (\mathcal{S}_2) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 3x & + & 4y & + & 2z & = a \\ & & 2y & + & z & = b \\ & & & & z & = c \end{array} \right. \qquad (\mathcal{S}_3) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrl} x & & & + & 2z & = a \\ 2x & + & y & - & z & = b \\ 3x & + & 2y & + & z & = c \end{array} \right.$$

2 Résolution matricielle d'un système linéaire

Il s'agit d'écrire matriciellement la méthode du pivot de Gauss appliquée à un système linéaire.

Exemple 3 Reprise du système linéaire de l'exemple 1.
On rappelle que $(\mathcal{S}_1) \iff A\,X = B$, avec:

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Méthode du pivot de Gauss:

$$(\mathcal{S}_1) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrll} x & - & y & + & z & = 2 & \\ & - & y & + & 4z & = 5 & L_2 \leftarrow \dots \\ & & y & - & 3z & = -4 & L_3 \leftarrow \dots \end{array} \right. \qquad \iff \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{A_1} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} \quad \\ \\ \end{pmatrix}}_{B_1}$$

En observant les matrices, comment passer de A, B à A_1, B_1?

Reprenons donc, d'un point de vue matriciel, les définitions et le vocabulaire associés à tout système linéaire:

2.1 Opérations élémentaires "matricielles"

Définition 2 *Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On définit des* **opérations élémentaires sur les lignes de** *A par:*

- $L_i \leftarrow a\,L_i$, $a \neq 0$: *multiplier la $i^{\text{ième}}$ ligne de A par a.*
- *Pour $i \neq j$, $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$: échanger les lignes i et j de A.*
- $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + a\,\mathrm{L}_j$, $i \neq j$: *ajouter à la $i^{\text{ième}}$ ligne de A, la $j^{\text{ième}}$ ligne de A multipliée par a.*

Définition 3 *Une* **matrice échelonnée en ligne** *est une matrice dont chaque ligne commence par plus de coefficients nuls que la ligne précédente.*
Le premier coefficient non nul de chaque ligne s'appelle le **pivot***.*

Remarque 1 Une matrice carrée échelonnée en ligne est une matrice ...

2.2 Mise en oeuvre matricielle

Exemple 4 Reprise de l'exemple 1.
Puisqu'on va faire les mêmes opérations élémentaires (et dans le même ordre) sur A et B, on présente les calculs ainsi:
•**Matrice augmentée du système:** $\Delta = (A|B)$.

$$\Delta = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

• Méthode du pivot de Gauss appliquée à Δ:

$$\Delta = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \ldots}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ecrire le système linéaire correspondant à la matrice augmentée obtenue:

Le système linéaire étant échelonné (réduite de Gauss de $(\mathcal{S}_1)$), on s'arrête.

Matriciellement: la matrice $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ étant échelonnée en ligne, on s'arrête! R est appelée **réduite de Gauss de** A (matrice échelonnée obtenue à partir de A par opérations élémentaires).

Que reste-t-il à faire pour terminer la résolution? A vous:

Remarque 2 : Ensemble de solutions d'un système linéaire.
On considère un système linéaire $(\mathcal{S})$ de matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$: $A\,X = Y$, avec $X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.
On appelle $A\,X = 0$ le système homogène associé, noté $(\mathcal{H})$.
Alors toute solution de $(\mathcal{S})$ est la somme d'une solution particulière de $(\mathcal{S})$ et d'une solution quelconque de $(\mathcal{H})$.
Preuve: Soit X_0 une solution particulière de $(\mathcal{S})$. Alors:
(Analyse:) SI X est solution de $(\mathcal{S})$: $AX = Y = AX_0 \iff A(X - X_0) = 0$ ssi $X - X_0$ est solution de $(\mathcal{H})$.
Conclusion: si X est solution de $(\mathcal{S})$, il s'écrit: $X = X_0 + (X - X_0)$, où X_0 est une solution particulière de $(\mathcal{S})$ et $X - X_0$ est une solution de $(\mathcal{H})$.
(Synthèse:) Réciproquement, supposons que X est tel que $X - X_0$ est une solution de $(\mathcal{H})$. Alors $X = X_0 + (X - X_0)$, où X_0 est une solution particulière de $(\mathcal{S})$ et $X - X_0$ est une solution de $(\mathcal{H})$. il vient:
$AX = A\,X_0 + A\,(X - X_0) = Y + 0 = Y$, donc X est bien solution de $(\mathcal{S})$.

■

2.3 Rang d'une matrice

Exemple 5 : reprise de l'exemple 3.
On a obtenu:

$$(\mathcal{S}_1) \iff \underbrace{\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = 2 \\ & - & y & + & 4z & = 5 \\ & & & & z & = 1 \end{array}\right.}_{\text{réduite de Gauss de } (\mathcal{S}_1)} \iff RX = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ où } R = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{réduite de Gauss de } A}.$$

Entourez les pivots de la réduite de $(\mathcal{S}_1)$ et de R, comparez. Que peut-on en déduire, pourquoi?

Conclusion:

système linéaire:	rang = nb de pivots d'une réduite de Gauss,
$\downarrow A$	
matriciellement:	rang de A= nb de pivots d'une réduite de Gauss.

Définition 4 **(Généralisation)**
Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. *On appelle* **rang de** A, *noté* $rg(A)$*:*

• *le rang de tout système linéaire de matrice A,*
ou encore:
• *le nombre de pivots d'une réduite de Gauss d'un système linéaire de matrice A,*
ou encore:
• *le nombre de pivots d'une réduite de Gauss de A.*

Remarque 3 On sait (par les systèmes linéaires) que: $\boxed{rg(A) \leqslant \min(n, p)}$

Proposition 1 **(admise)** *Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. $rg(A) = rg(A^T)$.*

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 : calcul du rang d'une matrice.
On lui applique la méthode du pivot de Gauss pour obtenir une matrice échelonnée (réduite de Gauss), *sans pour autant revenir à un système linéaire*!

3 Application: calcul et existence de l'inverse d'une matrice carrée

Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on se propose de répondre aux deux questions suivantes:

A est-elle inversible? Si oui, calculer son inverse A^{-1}.

Théorème 1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

A est inversible ssi tout système linéaire de matrice A est de Cramer.

Preuve:

■

Comment appliquer ce théorème?

3.1 Existence de l'inverse

Rappel 1 Soit un système linéaire de matrice A.
On note r le rang du système, c'est-à-dire le nombre de pivots d'une réduite de Gauss.
∗ si $r \neq n$ (c'est-à-dire $r < n$): le système est incompatible ou a une infinité de solutions.
∗ si $r = n$: le système a une unique solution, il est donc de Cramer.
Conclusion: à retenir:

$$\boxed{\textbf{Un système linéaire } n \textbf{ lignes, } n \textbf{ colonnes, est de Cramer ssi son rang est égal à } n}$$

Donc:

Théorème 2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,*

$$\boxed{A \textit{ est inversible ssi } rg(A) = n}$$

Remarque 4 Ce théorème ne donne pas l'expression de A^{-1}, mais juste son existence. Il est donc insuffisant si l'exercice demande le calcul de A^{-1}.

Remarque 5 : cas particulier des matrices carrées d'ordre deux.
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$,

$$\boxed{A \text{ est inversible ssi } \det A \neq 0 \text{ ssi } rg(A) = 2} \text{ et dans ce cas, on connaît } A^{-1}:$$

Application aux systèmes linéaires à deux équations, deux inconnues:

$$A \text{ est inversible ssi } \det A \neq 0 \text{ ssi tout système linéaire de matrice } A \text{ est de Cramer.}$$

Autrement dit:

$$\boxed{\text{tout système linéaire } \left\{ \begin{array}{lcll} ax & + & by & = e \\ cx & + & dy & = f \end{array} \right. \text{ est de Cramer ssi} \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Dans ce cas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \qquad\qquad\qquad\qquad \times \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \ldots$$

Soit:

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ et $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$. Moyen mémotechnique pour retenir ces formules:

3.2 Calcul pratique de l'inverse

Proposition 2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On rappelle que:*
A est inversible (ssi $rg(A) = n$) ssi pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, le système $AX = Y$ est de Cramer.
Et dans ce cas, $X = A^{-1}Y$.

C'est cette proposition qui va nous permettre de calculer A^{-1} (si A est inversible).

3.2.1 Mise en oeuvre en utilisant les systèmes linéaires

Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, on pose le système linéaire de matrice A: $AX = Y$,d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

- **Étape 1: obtention d'une réduite de Gauss pour l'existence de l'inverse.**

On applique la méthode de Gauss sur le système ou la matrice augmentée $\Delta = (A|Y)$ pour obtenir une réduite de Gauss. Comment montrer que A est inversible ou non inversible?

Si A n'est pas inversible, on s'arrête; si A est inversible, on continue pour calculer A^{-1}:

- **Étape 2: résolution du système pour le calcul de l'inverse.**

On résout le système par substitutions remontantes: on obtient $X = BY$ alors $B = A^{-1}$.

Exemple 6 Etudier l'inversibilité de la matrice: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- Poser un système linéaire de matrice A:

- Calculer une réduite de Gauss du système (rester en matrice ou en système: au choix)

STOP! Ne pas oublier de dire si le système est de Cramer et donc si la matrice est inversible!!

SI LA MATRICE EST INVERSIBLE:

- Terminer la résolution du système (substitutions remontantes sur le système): $X = \boxed{A^{-1}}\, Y$

Exprimer X en fonction de Y et en déduire A^{-1} (repasser en matrice!!)

Proposition 3 **:**

(1) $diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est inversible ssi $\forall i,\ a_i \neq 0$, et dans ce cas: $\boxed{(diag(a_1, a_2, \ldots, a_n))^{-1} = diag(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n})}$

(2) Toute matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, et dans ce cas, l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Preuve:
(1)

(2)

■

3.2.2 Méthode de Gauss-Jordan

C'est le même principe que la section 3.2.1, mais avec une autre forme de présentation des calculs:
Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, posons le système linéaire de matrice A: $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.
Remarquons que $AX = Y \iff \boxed{A}X = \boxed{I_n}Y$.

• Etape 1: par la méthode du pivot de Gauss, on obtient: $\boxed{A}X = \boxed{I_n}Y \iff \boxed{R}X = \boxed{C}Y$, où:
R est une réduite de Gauss et C est la matrice obtenue à partir de I_n par les mêmes opérations élémentaires (et dans le même ordre) que pour A.
Si A est inversible, on continue:

• Etape 2: Par substitutions remontantes, on obtient:
$\boxed{A}X = \boxed{I_n}Y \iff RX = CY \iff X = A^{-1}Y \iff \boxed{I_n}X = \boxed{A^{-1}}Y.$

En remarquant que les substitutions remontantes sont une succession d'opérations élémentaires sur les lignes, à partir de la dernière ligne et selon un algorithme bien précis, on s'aperçoit que la méthode de Gauss-Jordan consiste à:
∗ *appliquer les mêmes opérations élémentaires sur les lignes (et dans le même ordre) aux matrices A et I_n.*
∗ *à la fin de l'algorithme:* $\boxed{A \to I_n \text{ et parallèlement } I_n \to A^{-1}}$ *où → désigne une succession d'opérations élémentaires sur les lignes, selon un algorithme bien précis:*

• **Étape 1: obtention d'une réduite de Gauss pour l'existence de l'inverse.** *(méthode de Gauss)*
• **Étape 2: obtention de l'inverse** *(méthode de Jordan)*

Exemple 7 : reprise de l'exemple 5.