Matrices et systèmes linéaires

I. Rang d'une matrice.

Exercice 1 Calculer le rang des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

1. Discuter en fonction du paramètre $m \in \mathbb{C}$, le rang de la matrice $\begin{pmatrix} m & 1-m & 1+m \\ 0 & 1-m & m \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$.
2. Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & \lambda \end{pmatrix}$ selon les valeurs du paramètre réel λ.

Exercice 3 :

1. Déterminer les valeurs du réel m telles que la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$ est inversible.
2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice suivante est-elle inversible?
$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

II. Matrices inversibles.

Exercice 4 Les matrices suivantes sont-elles inversibles? Si oui, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 :

1. Justifier que $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $M^T M$ et retrouver M^{-1} grâce à ce calcul.

Exercice 6 :

1. Soient λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 quatre complexes. On considère le système linéaire :
$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccl} x & + & 3y & + & 4z & + & 7t & = \lambda_1 \\ x & + & y & + & z & + & t & = \lambda_2 \\ x & + & 3y & + & 3z & + & 2t & = \lambda_3 \\ x & + & 3y & + & 4z & + & 5t & = \lambda_4 \end{array} \right.$$
Résoudre $(\mathcal{S})$.
2. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

III. Matrices inversibles et puissances.

Exercice 7 :

On considère les matrices:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}MP$. En déduire D^n pour tout entier naturel n.
3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer M^n en fonction de P^{-1}, P, D et n.

Exercice 8 On considère les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible, d'inverse: $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}\,A\,P$ et vérifier qu'elle est diagonale. En déduire D^n pour tout entier n.
3. Montrer que $A = P\,D\,P^{-1}$, puis que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$. Expliciter A^n pour tout entier n.

Exercice 9 On considère une suite (u_n) vérifiant: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2\,u_n$.
L'objectif est de trouver une expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1 (sans utiliser les formules générales).
On pose, pour tout entier n: $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Trouver la matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $X_{n+1} = A\,X_n$.
   (b) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n\,X_0$.

   L'objectif devient donc le calcul de A^n.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) On pose $D = P^{-1}\,A\,P$. Vérifier que D est diagonale et calculer D^n pour tout entier n.
   (c) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.
   (d) En déduire A^n pour tout entier n.
3. Conclure.

Exercice 10 On considère une suite (u_n) vérifiant: $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $u_2 = -1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 2\,u_{n+2} + u_{n+1} - 2\,u_n$
On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $Q = P^{-1}$
2. Que vaut $D = QAP$? En déduire D^n, pour tout entier naturel n
3. Déterminer A^n, pour tout entier naturel n
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$
   Montrer que $X_{n+1} = A\,X_n$ et en déduire une expression de u_n en fonction de n.