Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ – Partie I: par monotonie de la suite

BCPST 1C – Mme MOREL

Soit f une fonction définie, continue et dérivable sur un intervalle I.
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Le but de ce TD est d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où la suite est monotone.
A noter que tous les résultats énoncés dans ce TD doivent savoir être redémontrés à chaque utilisation.

1 Étude d'un exemple

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*\,,\ f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) \text{ et } u_0 = 2\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = f(u_n)\,.$$

1.1 Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.
2. Donner l'allure graphique de la courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. Calculer graphiquement l'ensemble image $f([\sqrt{3}, +\infty[)$.

1.2 Étude de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$

1.2.1 Préliminaire: la suite (u_n) est-elle bien définie?

→ cf 2.

1.2.2 Dynamisme de la suite et conjectures

Construire les cinq premiers termes de la suite dans le même repère que $\mathcal{C}_f$.
Puis vérifier sur votre calculatrice (tracez plus de termes).
Conjecturer sur la monotonie et la convergence de la suite (u_n).

→ cf 3.

1.2.3 Preuves monotonie et convergence / divergence de la suite

Démontrer votre conjecture sur la monotonie de la suite (u_n) (cf 4.1.1 et 4.1.2):

Montrer que la suite converge et déterminer sa limite (cf 4.2.1 et 4.2.2):

2 Existence de la suite

Exemple 1 Considérons la suite u définie par: $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{u_n - 1} \end{array}\right.$

Calculer u_1 puis u_2. La suite u est-elle bien définie?

$*$ Si f est définie sur $\mathbb{R}$, la suite (u_n) est parfaitement définie.
$*$ Sinon, il faut justifier que $(u_n)_n$ est bien définie AVANT de l'étudier:

Proposition 1 *Soit I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$, ensemble de définition de f.*
Si $f(I) \subset I$ (on dit que I est stable par f) et $u_0 \in I$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$: u_n est bien défini et $\boxed{u_n \in I}$

Preuve: $\boxed{\text{RÉCURRENCE}}$ à savoir refaire:
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in I$.
• $n = 0$:
• $n \geqslant 0$: supposons le résultat acquis à un certain rang n: u_n est bien défini et $u_n \in I$.
Au rang $n + 1$:

Conclusion:

■

POINT METHODE 1 : Comment montrer que $f(I) \subset I$?

$*$ Soit on calcule l'intervalle image $J = f(I)$.

$\rightarrow$ *Pour l'instant, nous le ferons graphiquement (il nous manque le chapitre sur la continuité)*

$*$ Soit on montre que $\forall x \in I$, $f(x) \in I$ par le calcul direct en utilisant la monotonie de f et / ou encadrements successifs.

3 Conjecturer la convergence de la suite

Selon les variations de f et la position de u_0, le comportement de la suite (u_n) peut fortement varier. Il convient donc d'utiliser le graphe de f pour se faire une idée de son comportement.
On étudie donc la fonction f de façon à pouvoir construire son graphe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, tout en précisant la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la première bissectrice Δ (droite d'équation $y = x$).
On représente alors les termes de la suite en effectuant une suite de ricochets de la courbe vers Δ. La ligne brisée obtenue s'appelle le dynamisme de la suite.
De l'observation graphique, on conjecture le sens de variations de la suite, la majoration, la minoration de la suite, sa nature.
Dans un deuxième temps, on passe aux démonstrations des résultats observés.

4 Etude de la CONVERGENCE, basée sur la MONOTONIE de la suite

4.1 Monotonie de la suite

4.1.1 Première méthode: croissance de f sur I

Proposition 2 *Si f est croissante sur I (où I est un intervalle qui satisfait la Proposition 1) alors la suite (u_n) est* **monotone**.

Remarque 1 : ATTENTION!!
(1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas forcément croissante! Elle peut aussi être décroissante...
(2) Si f est décroissante sur I, on ne peut rien dire sur la monotonie de la suite!

contre-exemple: Suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n}$.

Remarque 2 *Pour préciser la monotonie de la suite:*
$*$ On se base sur la conjecture obtenue par observation graphique,
$*$ On calcule $u_1 = f(u_0)$ et on le compare à u_0.
Si $u_0 \leqslant u_1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante; si $u_0 \geqslant u_1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Preuve: $\boxed{\text{RÉCURRENCE}}$ à savoir refaire:
$*$ **Cas où $u_0 \leqslant u_1$.**
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
• $n = 0$:

• $n \geqslant 0$: supposons le résultat acquis à un certain rang n: $u_n \leqslant u_{n+1}$.
Au rang $n + 1$:

$*$ **Cas où $u_0 \geqslant u_1$:** en exercice ...

■

Remarque 3 :
(1) La propriété "$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$" est nécessaire dans cette preuve!
(2) Pour la croissance de f, même si $\mathcal{D}_f$ contient I, seule la monotonie de f **sur** I est requise.

4.1.2 Deuxième méthode: signe de $g(x) = f(x) - x$ sur I

Proposition 3 *Si pour tout $x \in I$, $f(x) - x$ est de signe constant (où I est un intervalle qui satisfait la Proposition 1), alors la suite (u_n) est* **monotone**.

Remarque 4 *Pour préciser la monotonie de la suite:*
Si $f(x) - x \geqslant 0$ $\forall x \in I$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante; Si $f(x) - x \leqslant 0$ $\forall x \in I$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Preuve: $\boxed{\text{PAS DE RÉCURRENCE}}$ à savoir refaire:
$*$ **Si** $f(x) - x \geqslant 0 \ \forall x \in I$**:**
IDÉE: On veut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, soit $f(u_n) - u_n \geqslant 0$. Il suffit donc de prendre $x = \ldots\ldots$
Question: a-t-on le droit?
A vous de rédiger:

$*$ **Si** $f(x) - x \leqslant 0 \ \forall x \in I$**:** en exercice.

■

Remarque 5 :
(1) La propriété "$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$" est fondamentale dans cette preuve!
(2)

POINT METHODE 2 Comment montrer que le signe de $f(x) - x$ est constant sur I?
$*$ Soit par un calcul direct (tableau de signes par exemple...),
$*$ Soit en étudiant les variations de la "fonction différence" $g(x) = f(x) - x$ **sur** I.

4.1.3 Récapitulation

CAPACITÉ 1 :
Comment étudier la monotonie d'une suite (u_n) définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$?
Si tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à I:

1. On peut montrer **par récurrence** une propriété du type: pour tout entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ ou $u_{n+1} \geqslant u_n$.
   ATTENTION: cette preuve requiert la **croissance de la fonction f sur** I.
2. Le **signe** de l'expression $f(x) - x$ **sur** I donne le sens de variations de la suite (u_n).

4.2 Limite de la suite

4.2.1 Existence

C'est le **-théorème de convergence monotone:**
Si on sait que (u_n) est croissante (resp. décroissante), il suffit de prouver qu'elle est (resp.) pour conclure sur sa convergence.
Donc, $(u_n)_n$ converge vers ℓ. Que peut-on dire sur ℓ?

4.2.2 Calcul

CAPACITÉ 2 Comment calculer cette limite?
Passer à la limite dans "$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$"
$*$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ldots$
$*$ $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$ (opérations usuelles sur les limites, ou continuité de f en ℓ, à suivre...)
Donc, à la limite, ℓ est solution de l'équation .... sur ......: on dit que ℓ est un **point fixe** de f.

Remarque 6 :
(1) La limite étant unique, vous ne devez trouver qu'une seule solution sur I...
(2) Parfois, on est amenés à rechercher les limites *éventuelles* de la suite.
Cela signifie que SI la suite (u_n) converge, quelles sont les limites possibles? On utilise alors la capacité exigible 2, en **supposant** que (u_n) converge vers ℓ.

POINT METHODE 3 Comment résoudre $f(x) = x$?
$*$ Si la valeur de la solution est demandée: par le calcul direct (on résout l'équation par équivalences).
$*$ Sinon: par le théorème de bijection appliqué à la fonction différence $g(x) = f(x) - x$, sur I (à suivre).

5 Entraînement (calculatrices autorisées)

Exercice 1 On note f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=1+\ln x$. Soit u la suite définie par $u_0 \geqslant 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Démontrer que la suite u est bien définie et qu'elle est minorée par 1.
2. Etudier le signe de $f(x)-x$ sur $[1,+\infty[$.
3. Etudier la monotonie de u.
4. En déduire que (u_n) est convergente, et donner sa limite.

Exercice 2 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0>0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$, avec $f(x)=\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}$.

1. Étudier f sur $]0,+\infty[$.
2. Déterminer le signe de $f(x)-x$, pour tout réel $x\geqslant 1$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\geqslant 1$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n=1$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et la relation : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sin(u_n)$.

1. On prend $u_0\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (a) Étudier le signe de $\sin(x)-x$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) Étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On prend $u_0\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$. De même, étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 :
Étudier la suite (u_n) (définition, monotonie, convergence) définie par: $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$.
Que se passe-t-il si on choisit $u_0=2$?

Exercice 5 Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n^2}$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$.
Montrer que (u_n) est croissante et qu'elle ne converge pas. En déduire sa limite.

Exercice 6 :
On considère la suite récurrente $u_{n+1}=f(u_n)$ avec $f(x)=x^2+\dfrac{3}{16}$ et $u_0\geqslant 0$.

1. Etudier f et le signe de $f(x)-x$. Quelles sont les limites possibles de (u_n)?
2. A l'aide d'observations graphiques, donner des conjectures sur la monotonie et la convergence de (u_n) si :
   (a) $u_0\in\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$,
   (b) $u_0\in\left]\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$,
   (c) $u_0\in\left]\dfrac{3}{4},+\infty\right]$.
3. Démontrez vos conjectures.