Suites réelles

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1 :
On appelle **suite réelle** *toute application* $\begin{array}{rcl} u : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$ *que l'on note* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* u.
u_n *est appelé le* **terme d'indice** n *de la suite.*
L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque 1 Il y a deux façons de définir une suite:
(1) *Explicite:* on peut calculer u_n directement en fonction de n.

Exemple 1 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$, *suite harmonique:* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}$.

(2) *Par récurrence:* on doit connaître un ou plusieurs termes précédents pour calculer u_n.

Exemple 2 :
(1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = u_n + 2n \end{cases}$
(2) *Suite de Fibonacci:* (F_n) définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

(ce type de définition implique l'utilisation du principe de récurrence)

Une suite étant une application, on peut reprendre le vocabulaire des applications

1.2 Suites monotones

Définition 2 :
(1) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* **constante** *si:* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$.
(2) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* **stationnaire** *si elle est constante à partir d'un certain rang (APCR):*
$\underbrace{\exists p \in \mathbb{N}}_{\text{il existe un rang } p}\ ,\ \underbrace{\forall n \geqslant p}_{\text{à partir duquel}}\ , u_n = u_p$.

Exemple 3 :
(1) La suite nulle ($u_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$) est constante.
(2) On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par: $u_n = \lfloor \dfrac{1}{n} \rfloor$, $\forall n \geqslant 1$.
$u_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2$, $0 < \dfrac{1}{n} < 1$, donc $u_n = 0$. Donc la suite u est stationnaire.

Définition 3 :
(1) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* **croissante** *(resp.* **strictement croissante***) ssi:* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$. *(resp.* $u_n < u_{n+1}$*)*
(2) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* **décroissante** *(resp.* **strictement décroissante***) ssi:* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$. *(resp.* $u_n > u_{n+1}$*)*
(3) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* **monotone** *(resp.* **strictement monotone***) ssi elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).*

Remarque 2 : ATTENTION!!
(1) Dire qu'une suite est monotone sur $[0, +\infty[$ NE VEUT RIEN DIRE!!!
(2) Une suite n'est pas forcément monotone! *Exemple:* $u_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 : Etude de la monotonie d'une suite.
• Une première méthode est:

calcul du SIGNE de la DIFFÉRENCE $u_{n+1} - u_n$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

Exemple 4 Monotonie de la suite $u_n = \sqrt{n}$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
On peut déterminer le signe de plusieurs façons, par exemple :

1. *argument de monotonie de la fonction racine:*
   $\forall n \in \mathbb{N}$, puisque la racine est   sur $[0, +\infty[$, on a $n \leqslant n+1 \Rightarrow$, donc la suite u est ...

2. *quantité conjuguée:*

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\,(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dots$$

   Donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, et la suite u est ...

• Une deuxième méthode est: **Si** (u_n) **ne s'annule jamais et est de signe constant:**

comparaison du QUOTIENT $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

Proposition 1 *Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$ *Alors:*
(1) u est croissante ssi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(2) u est décroissante ssi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Preuve:

■

Remarque 3 Si $u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors:
u est croissante ssi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et u est décroissante ssi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple 5 Étudions la monotonie de $u_n = \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:
Pour tout entier n **non nul**, on a bien $u_n > 0$, donc on peut étudier le quotient pour tout entier n non nul :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \dots$$

De plus, $u_1 = 1 \geqslant 0 = u_0$, donc u est croissante.

Remarque 4 : ATTENTION!
On peut TOUJOURS étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$, mais on NE PEUT PAS TOUJOURS regarder le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Il y a deux conditions pour cela: $\boxed{u_n \text{ doit être de signe constant et ne JAMAIS s'annuler}}$

POINT MÉTHODE 1 : quand utiliser le quotient pour l'étude de la monotonie d'une suite?
Lorsqu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a ses termes *"multiplicatifs"* qui s'expriment en fonction de logarithme, exponentielle, factorielle, ou puissances de n, il vaut mieux utiliser la méthode du quotient (si elle est possible!!!).

Exemple 6 :
(1) Étudions la monotonie de $u_n = n\, e^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$:
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$, donc on peut regarder le quotient pour tout entier n **non nul**:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)\, e^{n+1}}{n\, e^n} = \dots$$

De plus, $u_1 = e \geqslant 0 = u_0$, donc la suite u est croissante.
(Si on regarde la différence: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (n+1)\, e^{n+1} - n\, e^n = e^n\,(n\,e - n + e)$. La recherche du signe est donc plus compliquée) ...
(2) Étude de la monotonie de la suite v définie par: $v_n = \dfrac{(n+1)!}{2^n}$ pour tout entier n.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ donc on peut regarder le quotient:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \dots$$

Donc la suite v est croissante.

1.3 Suites bornées

Définition 4 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*
(1) est **minorée** *ssi il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.*
(2) est **majorée** *ssi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.*
(3) est **bornée** *ssi elle est à la fois minorée et majorée: $\exists m, M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}\,,\ m \leqslant u_n \leqslant M$.*

Exemple 7 :
(1) $u_n = (-1)^n$ est bornée ($u_n = 1$ ou $u_n = -1$).
(2) $u_n = n\,e^n$ est minorée (par 0), mais pas majorée.

Rappel 1 De façon équivalente, on peut utiliser les valeurs absolues pour exprimer qu'une suite est bornée:
$\boxed{\text{Une suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée ssi il existe } M \geqslant 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M}$

Remarque 5 : ATTENTION!
Minorant et majorant ne dépendent pas de n!!

Exemple 8 Si on a une suite u qui vérifie: $u_n \leqslant \sin n\ \forall n \in \mathbb{N}$, en déduire que (u_n) est majorée par $\sin n$ est FAUX! Par contre, puisque $u_n \leqslant \sin n \leqslant 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, on peut dire que la suite u est majorée par 1.

Remarque 6 :
(1) Si la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante alors elle est minorée par ......: $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant$ ....
(2) Si la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante alors elle est majorée par ......: $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant$ ....

2 Suites convergentes (limite finie)

2.1 Définition

Lecture graphique 1 :

Intuitivement, u_n tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ signifie que u_n est très proche de ℓ (autant que l'on veut) quand n est suffisamment grand:

$\forall \varepsilon > 0$,	$\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant N$	$\lvert u_n - \ell\rvert < \varepsilon$.
Pour tout voisinage de ℓ (intervalle de la forme $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$)	il existe un rang à partir duquel	u_n est très proche de ℓ (u_n est dans le voisinage de ℓ donné au départ) $u_n \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon] \iff \ell-\varepsilon < u_n < \ell+\varepsilon$ $\iff -\varepsilon < u_n - \ell < \varepsilon \iff \lvert u_n - \ell\rvert < \varepsilon$.

(On peut voir ε comme la tolérance ou la marge d'erreur qu'on s'autorise autour de ℓ)

Définition 5 *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **converge vers un réel** *ℓ ssi:*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon}$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque 7 :
(1) On peut prendre une inégalité large $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$: ça ne change rien.
(2) N dépend de ε: si on change ε, N change aussi.
(3) Il y a existence du rang N, pas forcément unicité!

Exemple 9 : $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

$\forall \varepsilon > 0$, **on cherche** $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_n - \ell| = \left|\dfrac{1}{n}\right| < \varepsilon$.

(Analyse) si N existe: $\left|\dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Donc on prend par exemple $N = \dots$

Réciproquement: Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $N = \dots$

Alors, $\forall n \geqslant N$, $n \geqslant \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$, et puisque la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$, il vient: $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Conclusion: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_n| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, i.e la suite u converge vers 0.

Exemple 10 $u_n = q^n$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $|q| < 1$, u converge vers 0.

• Si $q = 0$:

Si $q \neq 0$: $\forall \varepsilon > 0$, **on cherche** $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_n - \ell| = |q^n| = |q|^n < \varepsilon$.

(Analyse) si N existe: $n \ln|q| < \ln \varepsilon$... A-t-on le droit de passer au ln?

Donc $n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}$... Pourquoi changer le sens de l'inégalité?

Donc on prend $N = \dots$

Réciproquement :

Proposition 2 *Si une suite converge, alors sa limite est unique.*

Preuve:

■

Remarque 8 : ATTENTION!

La limite ne dépend pas de n! Écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n}$ n'a aucun sens!

Théorème 1 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ssi les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ.*

Preuve:

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ:

$$\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists\, N \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant N\,,\, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\,.$$

Donc: $\forall p \geqslant N$,

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ:

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\, N_1 \in \mathbb{N}/\forall p \geqslant N_1\,,\ |u_{2p} - \ell| < \varepsilon$$
$$\text{et } \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\, N_2 \in \mathbb{N}/\forall p \geqslant N_2\,,\ |u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon$$

On pose $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$, alors $\forall n \geqslant N$:
$*$ si n est pair, $n = 2p \geqslant N \geqslant 2N_1 \Rightarrow p \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| = |u_{2p} - \ell| < \varepsilon$.
$*$ si n est impair, $n = 2p + 1 \geqslant N \geqslant 2N_2 + 1 \Rightarrow p \geqslant N_2 \Rightarrow |u_n - \ell| = |u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon$.
Conclusion: $\forall n \geqslant N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

$\blacksquare$

POINT MÉTHODE 2 A quoi servent les sous-suites?
A étudier la nature d'une suite...

Exercice 1 :
(1) On considère la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$, où $\forall n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Cette suite est appelée série harmonique.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{1}{2}$. En déduire que (S_n) ne converge pas.

(2) Étudier la nature de la suite définie par: $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$, pour tout entier n.

2.2 Propriétés des suites convergentes

Proposition 3 *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve:

$\blacksquare$

Remarque 9 : La RÉCIPROQUE est FAUSSE!! Bornée $\not\Rightarrow$ convergente.
Contre-exemple: $u_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On a déjà vu que cette suite est bornée. Montrons que cette suite ne converge pas.
Raisonnons par l'absurde: supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ.
Alors que peut-on dire des sous suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$?

Conclusion: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

***Proposition 4* (admise):**
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a et $b < a < c$ alors $b < u_n < c$ APCR (à partir d'un certain rang).

Corollaire 1 *Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ.*
(1) Si $\ell > 0$ alors $u_n > 0$ APCR, et $u_n \geqslant \dfrac{\ell}{2}$ APCR.
(2) Si $\ell < 0$ alors $u_n < 0$ APCR.

Preuve:

■

2.3 Opérations sur les limites

Proposition 5 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers ℓ et ℓ'.*
(1) La somme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell + \ell'$. (admis)
(2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le produit $(\lambda\, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\,\ell$. (admis)
(3) Le produit $(u_n\, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\,\ell'$. (admis)
(4) La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$.

Preuve: (4)

■

***Proposition 6* (admise):** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\ell \neq 0$.*
Alors il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_0$, $u_n \neq 0$ et $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant N_0}$ converge vers $\dfrac{1}{\ell}$.

Remarque 10 Le Corollaire 1 assure que la suite est non nulle APCR.

***Théorème 2* (Passage à la limite dans les inégalités):**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers ℓ et ℓ'.
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ alors $\ell \leqslant \ell'$. (admis)

Remarque 11 :
(1) Il suffit d'avoir $u_n \leqslant v_n$ APCR
(2) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$, alors en passant à la limite, $\ell \leqslant \ell'$:

En passant à la limite, une inégalité stricte devient LARGE

exemple: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, donc en passant à la limite: $0 \boxed{\leqslant} 0$!!!
(3) ATTENTION! **La convergence des suites est une HYPOTHÈSE!**
Dire que $u_n \leqslant v_n$ APCR implique $\lim u_n \leqslant \lim v_n$ est FAUX: on doit montrer AVANT que les deux suites convergent.

***Théorème 3* (Théorème d'encadrement)**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites vérifiant:

$$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \text{ (APCR) et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent vers la même limite } \ell.$$

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Preuve:

■

CAPACITÉ EXIGIBLE 2 : utilisation des encadrements pour la convergence des suites définies avec $\sum$.

Exemple 11 Étudier la convergence de la suite u définie par: $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k+n^2}$.
Méthode: pour encadrer un signe $\sum$, on encadre le terme général et on somme les encadrements:

Corollaire 2 *Si (u_n) converge vers 0 et (v_n) est bornée (APCR) alors $(u_n\, v_n)$ converge vers 0.*

Preuve:

■

Exemple 12 $(\sin n)$ est bornée et $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\frac{\sin n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

2.4 Convergence des suites monotones

Théorème 4 **(théorème de la limite monotone):**
(1) Toute suite croissante et majorée converge.
(2) Toute suite décroissante et minorée converge.

Remarque 12 :
(1) Ce théorème donne un résultat qualitatif (existence de la limite finie = convergence) et non quantitatif (la valeur de la limite n'est pas connue).
(dans les exercices, quand la convergence d'une suite est demandée, **sans la valeur exacte de la limite***, il faudra penser à ce théorème)*
Type de raisonnement faux: (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc u converge $\boxed{\text{vers } 0}$: FAUX, ON NE CONNAIT PAS LA LIMITE!!
(2) Ce théorème donne un majorant ou un minorant de la limite.
En effet, par exemple, si u est décroissante et minorée par 0 ($\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$) alors u converge vers ℓ et en passant à la limite: $\ell \geqslant 0$ (inégalité LARGE!).
(3) On verra en exercice comment calculer la limite ℓ à partir d'une relation de récurrence sur la suite.

Preuve:
(1) Soit (u_n) une suite croissante et majorée. Montrons que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n}$
On pose $U = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. D'après les hypothèses, U est une partie de $\mathbb{R}$, donc $\sup U = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ existe. On note $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et on a donc: $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \ldots \ell}$
De plus, ℓ est le plus petit des majorants: $\underline{\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}}$ tel que $\ell - \varepsilon < u_N$.
Or la suite est croissante donc $\underline{\forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant u_N > \ell - \varepsilon}$
Finalement, $\forall n \geqslant N$, $\ell - \varepsilon < u_n \leqslant \ell < \ell + \varepsilon$, soit $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
Donc (u_n) converge vers ℓ.
(2) De même, si (u_n) est une suite décroissante et minorée, on montre que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ell = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n}$

■

Exemple 13 On considère la suite $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Monotonie de u: $\forall n \geqslant 1$, étudie -t-on la différence ou le quotient?

Donc (u_n) est décroissante.
De plus, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 0$, i.e. (u_n) est minorée.
Conclusion: par le théorème de la limite monotone, la suite u converge. Que peut-on dire de sa limite?

Définition 6 *Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont* **adjacentes** *si:*
- $*$ *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,*
- $*$ *$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,*
- $*$ $\Delta_n = v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème 5 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et:*
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Preuve:

∎

Exemple 14 Etude des suites: $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!n}$ et $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$*$ Exemple 13: (u_n) est décroissante.

$*$ $\forall n \geqslant 1$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, donc (v_n) est croissante.

$*$ $\Delta_n = v_n - u_n = -\frac{1}{n!n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Conclusion: les suites sont adjacentes et convergent vers la même limite. (il s'agit du nombre de Neper e)

3 Limites infinies

3.1 Définition

Lecture graphique 2 :

Intuitivement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ signifie que u_n est très grand (aussi grand que l'on veut) quand n est suffisamment grand:

$\forall A \in \mathbb{R}$,	$\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant N$	$u_n \geqslant A$.
Pour tout "voisinage de $+\infty$" (au dessus de tout seuil)	il existe un rang à partir duquel	u_n est très grand (u_n est au dessus du seuil donné au départ)

Définition 7 :
(1) On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ *si:*

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R},\, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant N,\, u_n \geqslant A}$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
(2) On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge vers** $-\infty$ *si:*

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R},\, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant N,\, u_n \leqslant A}$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
(3) On dit qu'une suite **diverge** *si elle diverge vers une limite infinie ou si elle n'a pas de limite.*

Remarque 13 Comme dans le cas des limites finies, prendre des inégalités strictes ($u_n > A$) ne change rien.

Exemple 15 $u_n = \sqrt{n}$ diverge vers $+\infty$.

3.2 Relation d'ordre et suites monotones

Proposition 7 *Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que: $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \leqslant v_n$. (APCR suffit)*
(1) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi vers $+\infty$.
(2) si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi vers $-\infty$.

Preuve:

■

Remarque 14 : ATTENTION!
(1) On n'a pas besoin d'un encadrement: une seule inégalité suffit:

Exemple 16 $\forall n \geqslant 1,\, n^n = \underbrace{n \times \ldots \times n}_{n \text{ fois}} \geqslant n \times \underbrace{1 \times \ldots \times 1}_{(n-1) \text{ fois}} = n$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^n = +\infty$.

(2) L'inégalité doit être dans le bon sens:

Exemple 17 $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, n^2 \geqslant 1 \Rightarrow n \geqslant \frac{1}{n}$.
On a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais ce n'est pas pour autant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$!!

Théorème 6 :
(1) Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
(2) Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Preuve:

$\blacksquare$

Exemple 18 Retour sur la série harmonique:

3.3 Opérations sur les limites

Pour déterminer la limite de la somme, du produit ou du quotient de deux suites admettant des limites finies ou non, il suffit de lire les tableaux suivants.
F.I signifie *"Forme indéterminée"*: les théorèmes ne permettant pas de déterminer la limite, on ne peut conclure. Il va donc falloir *lever l'indétermination* par d'autres méthodes.

• **Somme:**

$+$ $\nearrow$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I
$+\infty$	$+\infty$	F.I	$+\infty$

• **Produit:**

$\times$ $\nearrow$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell = 0$	F.I	F.I
$\ell > 0$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

• **Quotient:**

u_n	$\ell \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$	$\ell = 0^+$ (u_n>0 APCR)	$\ell = 0^-$ (u_n<0 APCR)	$\ell = 0$
$\dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	n'a pas de limite

• **Conclusion:** Il y a quatre types de formes indéterminées:

$$\boxed{(+\infty) + (-\infty);\ 0 \times \infty;\ \frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty}}$$

CAPACITÉ EXIGIBLE 3 : Comment lever une indétermination?

1. **Mettre en facteur le terme de plus haut degré:**

   Exemple 19 $u_n = \dfrac{n^3 + n^2 - 1}{n^2 + 2}$ (F.I de la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$)
   Puisque n tend vers $+\infty$, n est suffisamment grand, donc $n > 0$ ($n \neq 0$ suffit), donc:

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3} = 1$.
   De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{2}{n^2} = 1$.
   Conclusion: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{2}{n^2}} = 1 \boxed{>0}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

   Exemple 20 $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (F.I de la forme $(+\infty) + (-\infty)$)
   Puisque n tend vers $+\infty$, n est suffisamment grand, donc $n > 0$, donc:

$$v_n = \sqrt{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right).$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=\sqrt{1}=1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1\right)=0$, et on récupère une F.I de la forme $0\times\infty$ ...
Cette méthode n'est donc pas adaptée, car l'indétermination provient du signe "$-$" entre les racines...

2. **Quantité conjuguée:**

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.

3. **Croissances comparées:**

Proposition 8 $\forall\alpha,\beta>0$, $\forall a>1$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}=0\qquad\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=0\qquad\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0}$$

Rappel 2 $a^n=e^{n\ln a}$ (exponentielle de base a), donc pour l'exponentielle (de base e):

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n!}=0\qquad\lim_{n\to+\infty}n^\alpha e^{-n}=0}$$

Remarque 15 On prend aussi la notation $u_n<<v_n$ si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$ qui se lit: "v_n l'emporte sur u_n". Donc:

$$\boxed{(\ln n)^\beta<<n^\alpha<<a^n<<n!}$$

(la factorielle l'emporte sur les exponentielles qui l'emportent sur les puissances qui l'emportent sur les logarithmes)

Penser aussi aux inverses: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n^\alpha}=+\infty$.

Preuve:
Preuve de $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}=0$ pour plus tard...
Preuve de $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^\alpha}{a^n}=0$:
Posons $u_n=\dfrac{n^\alpha}{a^n}$ pour tout entier n. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$, et montrons que la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ quand n tend vers $+\infty$ est $\dfrac{1}{a}$:

Puisque $\dfrac{1}{a}<1$, il existe un réel q tel que $0<\dfrac{1}{a}<q<1$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<q$ APCR. Donc $u_{n+1}<qu_n$ APCR ($\forall n\geqslant N$).
Donc, par récurrence: $\forall n\geqslant N$, $u_n<q^{n-N}\,u_N$.
Conclure sur la limite de u:

$\blacksquare$

Remarque 16 ATTENTION à "l'emporte" TROP RAPIDE!!

Exemple 21 $u_n = \dfrac{e^{\sqrt{\ln n}}}{n^2}$ n'est pas une croissance comparée...

Remarque 17 : ATTENTION!
Pour les suites de la forme $a_n^{b_n}$: PASSER À L'EXPONENTIELLE!!
Sinon, le risque est de ne pas voir l'indétermination et d'écrire de grosses bêtises...

Exemple 22 $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Version fausse: $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$ et $1^n = 1\ \forall n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$...
Version juste: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^{n\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$, il y a donc indétermination!!

4. **Utilisation des équivalents**

4 Suites équivalentes

4.1 Définition

Définition 8 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui ne s'annulent pas (au moins APCR).*
On dit que (u_n) est **équivalente** *à (v_n) et l'on note* $\boxed{u_n \sim v_n}$ *lorsque:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1\,.$$

Remarque 18 Lorsque (u_n) est équivalente à (v_n), (v_n) est aussi équivalente à (u_n) donc, sans précision d'ordre, on peut dire: (u_n) et (v_n) sont équivalentes.

Remarque 19 Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$, $u_n \sim \ell$ signifie ...
Si $\ell = 0$, $\boxed{\text{NE JAMAIS écrire } u_n \sim 0!!!}$

Exemple 23 : le plus haut degré l'emporte en $+\infty$.
(1) $2n^2 + n + 1 \sim 2n^2$, en effet:

(2) $-5n^3 + n^2 - 1 \sim \ldots$
(3) **Tout polynôme est équivalent en $+\infty$ à son monôme de plus haut degré:**

$$a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0 \sim a_p n^p \text{ , avec } a_p \neq 0$$

En effet:

Exemple 24 : équivalents usuels.
Soit (u_n) non nulle APCR et telle que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$ alors:

$$\boxed{\begin{array}{llll} \sin(u_n) \sim u_n & \tan(u_n) \sim u_n & \cos(u_n) - 1 \sim -\dfrac{u_n^2}{2}, & \\ e^{u_n} - 1 \sim u_n & \ln(1+u_n) \sim u_n & \sqrt{1+u_n} - 1 \sim \dfrac{u_n}{2} & (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^* \end{array}}$$

4.2 Propriétés

***Proposition 9* :**
(1) **Transitivité:** *si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.*
(2) **Multiplication par un réel non nul:** *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, si $u_n \sim v_n$ alors $\lambda u_n \sim \lambda v_n$.*
(3) **Produit:** *si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim r_n$ alors $u_n v_n \sim w_n r_n$.*
(4) **Quotient:** *si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim r_n$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{w_n}{r_n}$.*

Preuve: Il s'agit d'utiliser les opérations sur les suites convergentes:

■

POINT MÉTHODE 3 :
Dans un calcul de limite, on peut remplacer, sans hésiter, une suite par l'un de ses équivalents dans un produit, un quotient.

Exemple 25 :
(1) Quotient de deux polynômes: $\dfrac{2n^2+5n-1}{(3n-1)(1-n)}$.

(2) $n\sin(\dfrac{n+1}{n^2})$:

Proposition 10 **(composées):**
(1) **Valeur absolue:** $u_n \sim v_n \Rightarrow |u_n| \sim |v_n|$.
(2) **Puissance entière:** $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n^p \sim v_n^p$, *pour tout* $p \in \mathbb{N}$.
(3) **Puissance réelle constante:** $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$, *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$. *(*$u_n > 0$ *et* $v_n > 0$ *APCR)*

Preuve:

■

POINT MÉTHODE 4 :
Dans un calcul de limite, on peut remplacer, sans hésiter, une suite par l'un de ses équivalents dans une élévation à une puissance constante.

Exemple 26 :
(1) $(n+2)\sqrt{n^2+n+1}$

(2) $\dfrac{(n^2+n+1)^5}{2n+3}$

Remarque 20 ATTENTION: **ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS !**
contre-exemple: $n^2+1 \sim n^2$ et $-n^2-3 \sim -n^2$ MAIS $n^2+1-n^2-3 \sim n^2-n^2$?

Remarque 21 ATTENTION aux EXPONENTIELLES et au LOGARITHME :
* $n^2+n \sim n^2$ MAIS $e^{n^2+n} \sim e^{n^2}$?
* $1+e^{-n} \sim 1$ MAIS $\ln(1+e^{-n}) \sim \ln 1$?

En fait:
* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0 \Rightarrow e^{u_n} \sim e^{v_n}$.
* Si $u_n \sim v_n$ avec $u_n, v_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L \neq 1$ (avec $L \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$) alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

POINT MÉTHODE 5 Dans un calcul de limite, dans une somme ou une différence ou encore pour composer avec une fonction (comme l'exponentielle, le logarithme, le sinus, ..., mais pas l'élévation à une puissance constante), une étude particulière s'impose car il n'existe pas de résultat général.

4.3 Applications

4.3.1 Recherche de limite

Proposition 11 *Si* (u_n) *converge vers* ℓ, *où* $\ell \neq 0$ *alors* $u_n \sim \ell$.

Théorème 7 *Si* $u_n \sim v_n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Preuve:

■

Exemple 27 :

(1) $\dfrac{\sin(\frac{1}{n})}{e^{\frac{2}{n}} - 1}$.

(2) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

4.3.2 Recherche de signe

Théorème 8 *Si* $u_n \sim v_n$ *alors* u_n *et* v_n *sont de même signe APCR.*

Preuve:

■