Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Mme MOREL

Algorithme de dichotomie

1 Principe de la méthode

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
Cette méthode est applicable à la résolution des équations de la forme $f(x) = 0$ sur $[a, b]$ où f **est une fonction continue sur** $[a, b]$ **telle que** $f(a)\,f(b) < 0$ **(i.e de signe contraire).**
On suppose que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution s sur $[a, b]$.
Pour déterminer la solution s, on procède de la façon suivante:

1. **Première étape:**
   - on calcule $c = \dfrac{a+b}{2}$ (milieu du segment $[a, b]$);
   - on calcule $f(c)$ et $f(a)$;
   - si $f(a)\,f(c) \leqslant 0$ alors la solution s appartient au segment $[a, c]$ (cas 1),
     sinon la solution s appartient au segment $[c, b]$ (cas 2)
2. **Deuxième étape:**
   Dans les deux cas, la longueur de l'intervalle a diminué de moitié.
   Si on pose $b = c$ (cas 1) ou $a = c$ (cas 2), on peut recommencer le procédé sur le nouvel intervalle.
3. **Et ainsi de suite** ...

4. **Arrêt du processus:** on arrête les itérations lorsqu'à une étape, la longueur du nouvel intervalle devient inférieure à un nombre positif ε fixé à l'avance.
   On sort en prenant $s = c$ (dernière valeur calculée).

2 Convergence

La méthode précédente revient à définir deux suites (a_n) et (b_n) représentant respectivement l'origine et l'extrêmité des intervalles successifs. On prouve que ces deux suites sont adjacentes et que leur limite commune est solution de l'équation sur $[a, b]$.

Theorem 2.1 *Soit f une fonction* **continue** *sur un segment $[a,b]$ vérifiant $\mathbf{f(a)\,f(b)<0}$ et telle que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution s dans $[a,b]$.*
On pose $a_0=a$ et $b_0=b$.
$\forall n\in\mathbb{N}$, si $f(\dfrac{a_n+b_n}{2})\,f(a_n)\leqslant 0$ alors:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{n+1}=a_n \\ b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} \end{array}\right. \quad \textit{sinon} \left\{\begin{array}{l} a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1}=b_n \end{array}\right. .$$

Les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et leur limite commune est la solution s de l'équation $f(x)=0$ sur $[a,b]$.

Preuve :

3 Algorithme

On suppose que l'on a écrit une fonction Python `fonction(x)` permettant de calculer $f(x)$ pour x donné:

ALGORITHME.

```
def dicho(a,b,epsilon):
```

4 Erreur algorithmique

Definition 4.1 *Soit s la valeur exacte de la solution recherchée et s_a la valeur approchée donnée par les algorithmes précédents. On appelle erreur algorithmique la quantité $|s - s_a|$.*

Proposition 1 (évaluation de cette erreur)
s_a est une valeur approchée de s à ε près.

Preuve:
Soit n le nombre d'itérations. On a alors:

$$a_n \leqslant s \leqslant b_n \text{ et } s_a = c_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} = a_n \text{ ou } b_n \text{ selon le cas.}$$

Soit: $0 \leqslant s - s_a \leqslant b_n - a_n$ ou $a_n - b_n \leqslant s - s_a \leqslant 0$, donc dans les deux cas:

$$|s - s_a| \leqslant b_n - a_n \leqslant \varepsilon\,.$$