Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C- Madame MOREL

TP 7
Représentations graphiques – Dichotomie

I. Entraînement.

Exercice 1 On donne : $0,69 < \ln 2 < 0,70$. On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} g :]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + \ln x \end{array}$$

1. Tracer le graphe de la fonction g.
2. Vérifier graphiquement que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule sur $]0, +\infty[$.
   On note α cette solution et donner un encadrement de α.
3. Ecrire un programme `python` qui donne une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

II. Valeur approchée d'un point fixe.

Exercice 2 (valeur approchée de $\sqrt{2}$)
Soit $f(x) = x + \dfrac{1}{4}(2 - x^2)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Tracer le graphe de g, définie par $g(x) = f(x) - x$.
   Vérifier ainsi que f admet un unique point fixe sur $[a, b]$, où a et b sont deux réels à déterminer.
   On note α ce point fixe.
2. Ecrire un programme python qui donne une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Donner la valeur exacte de α.

Exercice 3 (valeur approchée de $\sqrt{3}$)
Même exercice avec $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 (valeur approchée de $\ln 2$)
Même exercice avec $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$, pour tout $x > 0$.

III. Suites implicites.

Exercice 5 On considère la fonction f définie comme suit:

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} \text{ pour tout } x \in]0, 1[\,.$$

1. Dans un même repère, tracer la courbe représentative de f et les droites d'équations $y = n$, pour $n = 1, \dots, 10$.
2. Pour tout entier naturel n non nul, vérifier que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $]0, 1[$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n \in]0, 1[$ tel que $f(u_n) = n$.
   (a) Ecrire un programme Python qui donne une valeur approchée de u_n à 10^{-2} près.
   (b) Etablir une démarche informatique permettant d'émettre une conjecture sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 6 Même exercice que le précédent avec l'équation $x + \tan x = n$, d'inconnue $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 7 On désigne par n un entier naturel non nul et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = nx - e^{-x}$$

1. Tracer dans un même repère les courbes des fonctions f_n, pour $n = 1, \dots, 6$.
2. Vérifier graphiquement que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une solution unique notée u_n.
3. Ecrire un programme Python qui donne une valeur approchée de u_n à 10^{-2} près.
4. Etablir une démarche informatique permettant d'émettre une conjecture sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 8 Même exercice que le précédent avec l'équation $\ln x - \dfrac{1}{x^n} = 0$ sur $]0, +\infty[$.