Suites réelles

I. Étude de la monotonie.

Exercice 1 Étudier la monotonie des suites définies par:

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \qquad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \ln k\right) - n\ln n \qquad w_n = \frac{5^n}{n!} \qquad x_n = \frac{n!}{2^{2n}} \qquad y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-k^2}}{k+1}$$

Exercice 2 Étudier la monotonie des suites suivantes:

$$\begin{cases} t_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = \frac{t_n}{t_n^2+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = e^{w_n - 2} \end{cases}$$

II. Calcul de limite.

Exercice 3 Calculer la limite des suites suivantes:

1. $u_n = \dfrac{n^2-3n+1}{n^3+4}$
2. $w_n = \dfrac{2-\frac{2}{n}}{2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$
3. $v_n = 4n - \sqrt{n^2+1}$
4. $x_n = \ln(n+1) - \ln n$
5. $y_n = \dfrac{\ln(n+n^2)}{n+\sqrt{n}}$
6. $u_n = e^{-\sqrt{n}} \ln(1+n+e^n)$
7. $v_n = \dfrac{\ln(1+\sqrt{n})}{\ln(1+n^2)}$
8. $w_n = 3^n e^{-3n}$
9. $x_n = \sqrt[n]{n^2}$
10. $u_n = \dfrac{n+\ln n+1}{n+e^n+e^{-n}}$
11. $u_n = 3^n + 2^{2n}$
12. $w_n = n^2 e^{-\sqrt{n}}$
13. $u_n = \dfrac{\ln(n^4+1)}{n^2+n+1}$

Exercice 4 Calculer la limite des suites suivantes:

1. $u_n = \dfrac{n^2-3n+1}{n^3+4}$
2. $w_n = \dfrac{2-\frac{2}{n}}{2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$
3. $v_n = 4n - \sqrt{n^2+1}$
4. $x_n = \ln(n+1) - \ln n$
5. $y_n = \dfrac{\ln(n+n^2)}{n+\sqrt{n}}$
6. $u_n = \exp\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$
7. $v_n = \dfrac{2^n}{n^2} + \cos(n!\, e^n)$
8. $w_n = \sqrt{n}\left(1 + \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)$
9. $x_n = \sqrt[n]{n^2}$
10. $y_n = \dfrac{n+\sin(2n)}{n-\ln(n^2)}$
11. $z_n = \dfrac{2n+\cos(n)}{n-2\sin(n)}$
12. $z_n = \dfrac{n^3+5n}{4n^2+\sin n+\ln n}$
13. $t_n = (n-3)\sqrt{\dfrac{n^3+1}{n^2+3}}$
14. $u_n = \dfrac{n+\ln n+1}{n+e^n+e^{-n}}$
15. $u_n = 3^n + 2^{2n}$
16. $w_n = n^2 e^{-\sqrt{n}}$
17. $u_n = n^2 \ln\left(1+e^{-n}\right)$
18. $u_n = \sin(\dfrac{1}{n}) - \tan(\dfrac{1}{n})$
19. $u_n = \dfrac{\ln(n^4+1)}{n^2+n+1}$
20. $u_n = n^3 \ln\left(\cos(\dfrac{1}{n^2})\right)$
21. $u_n = \left(\dfrac{4n}{4n-1}\right)^{2n+1}$
22. $u_n = \left(\cos(\dfrac{1}{n^2})\right)^n$
23. $\dfrac{\sin(\frac{1}{n^2})}{(e^{\frac{3}{n}}-1)\left(\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})-1\right)}$

Exercice 5 Étudier la convergence des suites suivantes:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \qquad R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+n^2}{k+n^3}$$

Exercice 6 Pour tout entier n non nul, on pose:

$$S_n = 1! + 2! + \ldots + n! = \sum_{k=1}^{n} k!$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, $S_{n-2} \leqslant (n-2) \times (n-2)!$
2. En déduire la limite de $\dfrac{S_{n-2}}{n!}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7 :

1. on considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0\,,\ f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x}$$

   (a) Étudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.

   (b) Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$.

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$$

3. On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, pour tout entier naturel n non nul.

   (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

   (b) Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ \ln(n+1) - \ln n \geqslant \frac{1}{n+1}$$

   (c) $(*)$ En déduire un encadrement de u_n, puis que $u_n \sim \ln n$.

Exercice 8 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose:

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

ON ADMET que pour tout réel $x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.
Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 9 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\ln k}{n^2}\right)$$

III. Théorème de convergence monotone.

Exercice 10 Soit la suite u définie par: $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n\, e^{-u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n > 0$, en déduire la monotonie de (u_n).
2. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

Exercice 11 Considérons la suite u définie par: $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2\,u_n^2}{1 + 5\,u_n}$ pour tout entier n.

1. Montrer que la suite u est bien définie et à termes strictement positifs. En déduire la monotonie de u.
2. Montrer que la suite u converge et calculer sa limite.

Exercice 12 On considère la suite u définie par $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} - 1$ et $u_0 = 2$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0,\ u_n \geqslant 1$. Etudier la monotonie de la suite u.
2. Montrer qu'elle converge et déterminer sa limite.

Exercice 13 Soit la suite u définie par: $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.
Montrer que la suite est bien définie et qu'elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 14 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x + x^2$ et la suite (u_n) définie par:

$$\begin{cases} u_0 = a > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Démontrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

IV. Sous-suites.

Exercice 15 :

1. On considère la suite u définie par: $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \cos\left((n + \dfrac{1}{n})\,\pi\right)$.
   Montrer que (u_n) diverge.

2. On rappelle avoir démontré avec le binôme de Newton que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair.
   En déduire que la suite $\left(\sin\left((3+\sqrt{5})^n\,\pi\right)\right)_n$ converge et déterminer sa limite.

V. Suites adjacentes.

Exercice 16 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Étudier la nature de la suite (u_n).

Exercice 17 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \frac{3u_n+v_n}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4} \end{cases}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice 18 On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies par: $\forall n \geqslant 2$,

$$a_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \text{ et } b_n = 2^n \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

Montrer que a et b sont adjacentes et déterminer leur limite commune.
On rappelle les formules: $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\,\cos\theta$ *et* $\tan(2\theta) = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

Exercice 19 $\forall n \geqslant 1$, on pose:

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \text{ et } T_n = S_n + \frac{1}{3n^2}$$

Montrer que les suites S et T convergent vers la même limite.

Exercice 20 :
$\forall n \geqslant 1$, on pose:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

1. Montrer que les suites u et v convergent vers la même limite notée ℓ.

2. Montrer que $\ell \leqslant -1$.

3. $(**)$ Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ en $+\infty$.