Suites réelles

I. Étude de la monotonie.

Exercice 1 Étudier la monotonie des suites définies par:

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \qquad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \ln k\right) - n \ln n \qquad w_n = \frac{5^n}{n!} \qquad x_n = \frac{n!}{2^{2n}} \qquad y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-k^2}}{k+1}$$

Exercice 2 :

1. Montrer que (t_n) est croissante : $\begin{cases} t_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = \frac{t_n}{t_n^2+1} \end{cases}$

2. Montrer que (w_n) est décroissante : $\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = e^{w_n - 2} \end{cases}$

II. Calcul de limite.

Exercice 3 Calculer la limite des suites suivantes:

1. $u_n = \dfrac{n^2 - 3n + 1}{n^3 + 4}$
2. $w_n = \dfrac{2 - \frac{2}{n}}{2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$
3. $v_n = 4n - \sqrt{n^2 + 1}$
4. $y_n = \dfrac{\ln(n + n^2)}{n + \sqrt{n}}$
5. $u_n = e^{-\sqrt{n}} \ln(1 + n + e^n)$
6. $v_n = \dfrac{\ln(1 + \sqrt{n})}{\ln(1 + n^2)}$
7. $w_n = 3^n e^{-3n}$
8. $x_n = (n^2)^{1/n}$
9. $u_n = \dfrac{n + \ln n + 1}{n + e^n + e^{-n}}$
10. $u_n = 3^n + 2^{2n}$
11. $w_n = n^2 e^{-\sqrt{n}}$
12. $u_n = \dfrac{\ln(n^4 + 1)}{n^2 + n + 1}$

Exercice 4 Calculer la limite des suites suivantes:

1. $u_n = \exp\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$
2. $v_n = \dfrac{2^n}{n^2} + \cos(n!\, e^n)$
3. $w_n = \sqrt{n}\left(1 + \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)$
4. $y_n = \dfrac{n + \sin(2n)}{n - \ln(n^2)}$
5. $z_n = \dfrac{2n + \cos(n)}{n - 2\sin(n)}$
6. $z_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin n + \ln n}$
7. $t_n = (n-3)\sqrt{\dfrac{n^3+1}{n^2+3}}$
8. $u_n = n^2 \ln\left(1 + e^{-n}\right)$
9. $u_n = \sin(\dfrac{1}{n}) - \tan(\dfrac{1}{n})$
10. $u_n = n^3 \ln\left(\cos(\dfrac{1}{n^2})\right)$
11. $u_n = \left(\dfrac{4n}{4n-1}\right)^{2n+1}$
12. $u_n = \left(\cos(\dfrac{1}{n^2})\right)^n$
13. $\dfrac{\sin(\frac{1}{n^2})}{(e^{\frac{3}{n}} - 1)\left(\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}) - 1\right)}$

Exercice 5 Étudier la convergence des suites suivantes:

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$
2. $R_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k + n^2}{k + n^3}$
3. $T_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$ $(x \in \mathbb{R})$

Exercice 6 (**) :

1. on considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0\,,\ f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x}$$

   (a) Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.

   (b) Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$.

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$$

3. On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, pour tout entier naturel n non nul.

   (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

   (b) Établir que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ \ln(n+1) - \ln n \geqslant \frac{1}{n+1}$$
   on pourra s'inspirer de la question 1, et poser une fonctions adéquate

   (c) En déduire un encadrement de u_n, puis que $u_n \sim \ln n$.

Exercice 7 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose:
$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$
On rappelle que pour tout réel $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ (Fiche 15).
Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 8 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\ln k}{n^2}\right)$$

III. Théorème de convergence monotone.

Exercice 9 :

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$

2. On définit la suite (S_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

   (a) Montrer que (S_n) converge. On note ℓ sa limite.

   (b) Montrer que $\ell \in]2, 3]$

Exercice 10 Soit la suite u définie par: $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n\, e^{-u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n > 0$, en déduire la monotonie de (u_n).

2. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

Exercice 11 Considérons la suite u définie par: $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{2\,u_n^2}{1 + 5\,u_n}$ pour tout entier n.

1. Montrer que la suite u est bien définie et à termes strictement positifs. En déduire la monotonie de u.

2. Montrer que la suite u converge et calculer sa limite.

Exercice 12 Soit la suite u définie par: $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.
Montrer que la suite est bien définie et qu'elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 13 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x + x^2$ et la suite (u_n) définie par:
$$\begin{cases} u_0 = a > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
Démontrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

IV. Suites adjacentes.

Exercice 14 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Étudier la nature de la suite (u_n).

Exercice 15 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \frac{3u_n+v_n}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est géométrique.
   En déduire une expression de son terme général en fonction de n, son signe et sa limite en $+\infty$.
2. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite, notée ℓ
3. Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est constante.
4. En déduire la valeur de ℓ

Exercice 16 On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies par: $\forall n \geqslant 2$,

$$a_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \text{ et } b_n = 2^n \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

Montrer que a et b sont adjacentes et déterminer leur limite commune.
On rappelle les formules: $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\,\cos\theta$ *et* $\tan(2\theta) = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

Exercice 17 (**) :
$\forall n \geqslant 1$, on pose:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

1. Montrer que les suites u et v convergent vers la même limite notée ℓ.
2. Montrer que $\ell \leqslant -1$.
3. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ en $+\infty$.