

Suites réelles

I. Étude de la monotonie.

Exercice 1 Étudier la monotonie des suites définies par:

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^n \ln k \right) - n \ln n \quad w_n = \frac{5^n}{n!} \quad x_n = \frac{n!}{2^{2n}} \quad y_n = \sum_{k=0}^n \frac{e^{-k^2}}{k+1}$$

Exercice 2 Étudier la monotonie des suites suivantes:

$$\begin{cases} t_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = \frac{t_n}{t_n^2 + 1} \end{cases} \quad \begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = e^{w_n - 2} \end{cases}$$

II. Calcul de limite.

Exercice 3 Calculer la limite des suites suivantes:

$$\begin{array}{llll} 1. u_n = \frac{n^2 - 3n + 1}{n^3 + 4} & 4. x_n = \ln(n+1) - \ln n & 7. v_n = \frac{\ln(1 + \sqrt{n})}{\ln(1 + n^2)} & 11. u_n = 3^n + 2^{2n} \\ 2. w_n = \frac{2 - \frac{2}{n}}{2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n} & 5. y_n = \frac{\ln(n + n^2)}{n + \sqrt{n}} & 8. w_n = 3^n e^{-3n} & 12. u_n = n^2 e^{-\sqrt{n}} \\ 3. v_n = 4n - \sqrt{n^2 + 1} & 6. u_n = \frac{e^{-\sqrt{n}} \ln(1 + n + e^n)}{e^{-\sqrt{n}} \ln(1 + n + e^n)} = & 9. x_n = \sqrt[n]{n^2} & 13. u_n = \frac{\ln(n^4 + 1)}{n^2 + n + 1} \\ & & 10. u_n = \frac{n + \ln n + 1}{n + e^n + e^{-n}} & \end{array}$$

Exercice 4 Calculer la limite des suites suivantes:

$$\begin{array}{llll} 1. u_n = \frac{n^2 - 3n + 1}{n^3 + 4} & 7. v_n = \frac{2^n}{n^2} + \cos(n! e^n) & 13. t_n = (n-3) \sqrt{\frac{n^3 + 1}{n^2 + 3}} & 20. u_n = n^3 \ln \left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ 2. w_n = \frac{2 - \frac{2}{n}}{2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n} & 8. w_n = \sqrt{n} \left(1 + \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \right) & 14. u_n = \frac{n + \ln n + 1}{n + e^n + e^{-n}} & 21. u_n = \left(\frac{4n}{4n-1} \right)^{2n+1} \\ 3. v_n = 4n - \sqrt{n^2 + 1} & 9. x_n = \sqrt[n]{n^2} & 15. u_n = 3^n + 2^{2n} & 22. u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^n \\ 4. x_n = \ln(n+1) - \ln n & 10. y_n = \frac{n + \sin(2n)}{n - \ln(n^2)} & 16. w_n = n^2 e^{-\sqrt{n}} & 23. \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\left(e^{\frac{3}{n}} - 1\right) \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)} \\ 5. y_n = \frac{\ln(n + n^2)}{n + \sqrt{n}} & 11. z_n = \frac{2n + \cos(n)}{n - 2 \sin(n)} & 17. u_n = n^2 \ln(1 + e^{-n}) & \\ 6. u_n = \exp\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right) & 12. z_n = \frac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin n + \ln n} & 18. u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right) & \\ & & 19. u_n = \frac{\ln(n^4 + 1)}{n^2 + n + 1} & \end{array}$$

Exercice 5 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée. Montrer que $\frac{\lfloor u_n \rfloor}{n}$ converge vers 0.

Exercice 6 Étudier la convergence des suites suivantes:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \quad T_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [k\pi] \quad R_n = \sum_{k=1}^n \frac{k + n^2}{k + n^3}$$

Exercice 7 Pour tout entier n non nul, on pose:

$$S_n = 1! + 2! + \dots + n! = \sum_{k=1}^n k!$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $S_{n-2} \leq (n-2) \times (n-2)!$

2. En déduire la limite de $\frac{S_{n-2}}{n!}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 :

1. on considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x}$$

- (a) Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.
 (b) Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$.

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

3. On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, pour tout entier naturel n non nul.

- (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
 (b) Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) - \ln n \geq \frac{1}{n+1}$$

- (c) (*) En déduire un encadrement de u_n , puis que $u_n \sim \ln n$.

Exercice 9 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose:

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

ON ADMET que pour tout réel $x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.
 Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 10 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\ln k}{n^2}\right)$$

III. Théorème de convergence monotone.

Exercice 11 Soit la suite u définie par: $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier n , $u_n > 0$, en déduire la monotonie de (u_n) .
 2. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

Exercice 12 Considérons la suite u définie par: $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1+5u_n}$ pour tout entier n .

1. Montrer que la suite u est bien définie et à termes strictement positifs. En déduire la monotonie de u .
 2. Montrer que la suite u converge et calculer sa limite.

Exercice 13 On considère la suite u définie par $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} - 1$ et $u_0 = 2$.

1. Montrer que $\forall n \geq 0$, $u_n \geq 1$. Étudier la monotonie de la suite u .
 2. Montrer qu'elle converge et déterminer sa limite.

Exercice 14 Soit la suite u définie par: $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.
 Montrer que la suite est bien définie et qu'elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 15 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par: $f(x) = x + x^2$ et la suite (u_n) définie par:

$$\begin{cases} u_0 = a > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Démontrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

IV. Sous-suites.

Exercice 16 :

- On considère la suite u définie par: $\forall n \geq 1, u_n = \cos\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$.
Montrer que (u_n) diverge.
- On rappelle avoir démontré avec le binôme de Newton que: $\forall n \in \mathbb{N}, (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ est un entier pair.
En déduire que la suite $(\sin((3 + \sqrt{5})^n \pi))_n$ converge et déterminer sa limite.

V. Suites adjacentes.

Exercice 17 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Étudier la nature de la suite (u_n) .

Exercice 18 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice 19 On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies par: $\forall n \geq 2$,

$$a_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \text{ et } b_n = 2^n \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

Montrer que a et b sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

On rappelle les formules: $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$ et $\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

Exercice 20 $\forall n \geq 1$, on pose:

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \text{ et } T_n = S_n + \frac{1}{3n^2}$$

Montrer que les suites S et T convergent vers la même limite.

Exercice 21 :

$\forall n \geq 1$, on pose:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

- Montrer que les suites u et v convergent vers la même limite notée ℓ .
- Montrer que $\ell \leq -1$.
- (**) Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ en $+\infty$.