Limites

BCPST 1C – Mme MOREL

Introduction: Notion de voisinage

Quand on dit que Julien et Nicolas habitent dans le même voisinage, cela signifie que leurs maisons sont "proches" l'une de l'autre:

En mathématiques, c'est pareil: un réel x est dans un voisinage de x_0 si x et x_0 sont "proches l'un de l'autre", au sens où:
• si $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\ (|x - x_0| < \eta), \text{ ou bien } x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \ (|x - x_0| \leqslant \eta)\,.$$

• si $x_0 = +\infty$: un réel x est dans un *voisinage de* $+\infty$ si x est suffisamment grand:

$$\exists A \in \mathbb{R} / x \in]A, +\infty[\text{ (ou } [A, +\infty[)\,.$$

• si $x_0 = -\infty$: un réel x est dans un *voisinage de* $-\infty$ si x est négatif et $|x|$ est suffisamment grand:

$$\exists B \in \mathbb{R} / x \in]-\infty, B[\text{ (ou }]-\infty, B])\,.$$

(On réserve "suffisamment petit" pour x dans un voisinage de 0)
Conclusion:

Les voisinages de $x_0 \in \mathbb{R}$ sont de la forme: $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$; $\eta > 0$
Les voisinages de $+\infty$ sont de la forme: $]A, +\infty[$, $[A, +\infty[$; $A \in \mathbb{R}$
Les voisinages de $-\infty$ sont de la forme:$]-\infty, B[$, $]-\infty, B]$; $B \in \mathbb{R}$.

(la notion de voisinage fait un zoom en un point. Un voisinage de $+\infty$ est équivalent à la notion APCR chez les suites)

1 Définitions

Dans cette partie, f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur son ensemble de définition, noté $\mathcal{D}_f$.

1.1 Limite en un point

On considère la limite de f en un réel x_0 qui est soit un point de $\mathcal{D}_f$, soit un bord de $\mathcal{D}_f$.

Exemple 1 : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.
$x_0 = 2 \in \mathcal{D}_f$ est un point de $\mathcal{D}_f$; $x_0 = 1 \notin \mathcal{D}_f$ est un bord de $\mathcal{D}_f$.

1.1.1 Limite finie

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$:

Intuitivement, $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 signifie que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ ($f(x)$ dans un voisinage de ℓ) quand x est suffisamment proche de x_0 (x est dans un voisinage assez petit de x_0), ou encore tout intervalle de ℓ (ou voisinage de ℓ) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de x_0:

$(*)$ | Pour tout voisinage de ℓ (fixé), on peut trouver un voisinage de x_0 sur lequel $f(x)$ reste dans le voisinage de ℓ donné au départ.

Traduction de $(*)$:
un voisinage de ℓ étant de la forme: $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$, $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ ($|f(x) - \ell| < \varepsilon$).
un voisinage de x_0 étant de la forme: $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $\eta > 0$, $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ (traduction de "sur lequel").
Donc $(*)$ s'écrit:

Définition 1 *On dit que f* **a pour limite ℓ en x_0** *ssi:*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists \eta > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\,,\, |f(x) - \ell| < \varepsilon}$$

On note $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$, $\lim_{x_0} f = \ell$.

Remarque 1 :
(1) On peut prendre des inégalités larges et intervalles fermés (voir l'introduction sur les voisinages).
(2) ATTENTION!! η dépend de ε! Le voisinage de x_0 dépend de celui de ℓ qu'on s'est donné au départ.

(On peut voir ε comme la tolérance ou la marge d'erreur qu'on s'autorise autour de ℓ)

Exemple 2 $\lim_{x \to 0} 2x + 1 = 1$.
En effet:

$\forall \varepsilon > 0$, on cherche $\eta > 0$ tel que $\forall x \in] - \eta, \eta[$, $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

■

Remarque 2 : ATTENTION!
La limite ne dépend pas de x! Écrire $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} x$ n'a aucun sens!

1.1.2 Limite infinie

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\ell \in \{-\infty, +\infty\}$:

On reprend $(*)$ en changeant les voisinages: l'idée est la même, seules les voisinages changent.
voisinage de $+\infty$: $]A, +\infty[$, $A \in \mathbb{R}$.
voisinage de $-\infty$: $]-\infty, B[$, $B \in \mathbb{R}$.

***Définition 2* :**
(1) On dit que f **a pour limite $+\infty$ en x_0** *ssi:*

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}\,,\, \exists \eta > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\,,\, f(x) \geqslant A}$$

On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$, $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$.
(2) On dit que f **a pour limite $-\infty$ en x_0** *ssi:*

$$\boxed{\forall B \in \mathbb{R}\,,\, \exists \eta > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\,,\, f(x) \leqslant B}$$

On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty$, $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$.

Exemple 3 : $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.
En effet:

$\blacksquare$

1.1.3 Limites à gauche, à droite

Parfois, x tend vers x_0 "sous contrainte":
(1) On impose à x de rester "à gauche" de x_0, i.e $x < x_0$. Ce qui revient à considérer la limite en x_0 de la restriction de f à $\mathcal{D}_f \cap]-\infty, x_0[$:
Si la restriction de f à $\mathcal{D}_f \cap]-\infty, x_0[$ admet une limite finie ou infinie en x_0, on dit que f admet une **limite à gauche en** x_0*, et on note* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Si ℓ *est finie*, on note aussi $\boxed{f(x_0^-) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)}$

(2) De la même manière, on parle de **limite à droite en** x_0**:** $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)}$ **ou** $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$**, où** $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$**; si** $\ell \in \mathbb{R}$**, on la note** $\boxed{f(x_0^+)}$

***Proposition 1* (admise):**
(1) Soit x_0 un **bord de** *$\mathcal{D}_f$, "intérieur" à $\mathcal{D}_f$ au sens où: $\exists \alpha > 0 /]x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha[\subset \mathcal{D}_f$.*
f a pour limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en x_0 ssi les limites à gauche et à droite de f en x_0 sont égales à ℓ:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \, .$$

(2) Si $x_0 \in \mathcal{D}_f$, "intérieur" à $\mathcal{D}_f$, f a pour limite $f(x_0)$ en x_0 ssi les limites à gauche et à droite de f en x_0 sont égales à $\boxed{f(x_0)}$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \, .$$

Remarque 3 : ATTENTION!
Si $x_0 \in \mathcal{D}_f$ et les limites à gauche et à droite de f en x_0 sont égales à ℓ, la limite de f en x_0 n'existe pas forcément!
Tout dépend: $\ell = f(x_0)$? En effet, à retenir:

$$\boxed{\text{si } x_0 \in \mathcal{D}_f \text{ et la limite de } f \text{ existe en } x_0 \text{ et vaut } \ell \ (\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell) \text{ alors } \ell = f(x_0)}$$

On peut avoir ce cas de figure:

Exemple 4 Étudions la limite de $\lfloor -|x| \rfloor$ en 0:

Exemple 5 :
(1) Valeur absolue: $|x| = \left| \begin{array}{ll} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{array} \right.$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} |x| = \boxed{0 = |0|} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} |x|$, donc la limite en 0 de $|x|$ existe et vaut: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0}$
(2) Partie entière: $\lfloor x \rfloor = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ -1 & \text{si } x \in [-1, 0[\end{array} \right.$

POINT MÉTHODE 1 :
utilisation des limites à droite et à gauche pour montrer qu'une limite en un point n'existe pas.

donc **la fonction partie entière n'admet pas de limite en** 0.

$\lim\limits_{x \to 0} \lfloor x \rfloor$ *n'existe pas! Pourtant, elle est* **définie** *en* 0*!!!*

Remarque 4 : ATTENTION!

CE N'EST PAS PARCE QU'UNE FONCTION EST DEFINIE EN UN POINT QU'ELLE ADMET FORCEMENT UNE LIMITE EN CE POINT.

1.2 Limite en l'infini

1.2.1 Limite en $+\infty$

Rappel 1 Voisinage de $+\infty$: $]A, +\infty[$, $A \in \mathbb{R}$.

Traduction de (*):

$\ell \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$	$\ell = +\infty : \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\ell = -\infty : \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
$\forall \varepsilon > 0$**,** $\exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]A, +\infty[$ $\lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$**.** **Exemple:** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$	$\forall B \in \mathbb{R}$**,** $\exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]A, +\infty[$ $f(x) > B$**.** **Exemple:** $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$	$\forall B \in \mathbb{R}$**,** $\exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]A, +\infty[$ $f(x) < B$**.** **Exemple:** $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty$

1.2.2 Limite en $-\infty$

Rappel 2 Voisinage de $-\infty$: $]-\infty, B[$, $B \in \mathbb{R}$.

Traduction de (*):

$\ell \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$	$\ell = +\infty : \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	$\ell = -\infty : \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
$\forall \varepsilon > 0$**,** $\exists B \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]-\infty, B[$ $\lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$**.** **Exemple:** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$	$\forall A \in \mathbb{R}$**,** $\exists B \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]-\infty, B[$ $f(x) > A$**.** **Exemple:** $\lim\limits_{x \to -\infty} \lvert x \rvert = +\infty$	$\forall A \in \mathbb{R}$**,** $\exists B \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]-\infty, B[$ $f(x) < A$**.** **Exemple:** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

2 Propriétés

Proposition 2 *On suppose que f possède une limite* $\boxed{\textit{finie}}$ *($\ell \in \mathbb{R}$) en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors:*
(1) La limite est unique. (admis)
(2) f est bornée sur un voisinage de x_0:
- *$x_0 \in \mathbb{R}$: $\exists \eta > 0$, $\exists M > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $\lvert f(x) \rvert \leqslant M$.*
- *$x_0 = +\infty$: $\exists A \in \mathbb{R}$, $\exists M > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]A, +\infty[$, $\lvert f(x) \rvert \leqslant M$.*
- *$x_0 = -\infty$: $\exists B \in \mathbb{R}$, $\exists M > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]-\infty, B[$, $\lvert f(x) \rvert \leqslant M$.*

(3) Si $a < \ell < b$ alors $a < f(x) < b$ pour tout réel x au voisinage de x_0. (admis)
(4) Si $\ell > 0$ alors f ne s'annule pas au voisinage de x_0: on peut minorer f par $\dfrac{\ell}{2} > 0$.

Preuve:
(2) $\forall \varepsilon > 0$**, il existe un voisinage de** x_0 **noté** V_ε**, tel que** $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap V_\varepsilon$, $\lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$**.**
On prend $\varepsilon = \ldots\ldots$**, alors** $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap V_1$, $\lvert f(x) \rvert = \ldots$
(4) $\forall \varepsilon > 0$**, il existe un voisinage de** x_0 **noté** V_ε**, tel que** $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap V_\varepsilon$, $\lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon \Rightarrow f(x) > \ell - \varepsilon$**.**
On prend $\varepsilon = \ldots\ldots$**, alors** $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap V_{\frac{\ell}{2}}$, $f(x) > \ldots$

■

Remarque 5 : ATTENTION!
La réciproque de (2) est fausse! Toute fonction bornée n'admet pas forcément de limite.
Contre-exemple: la fonction sinus est bornée sur $\mathbb{R}$, mais n'a pas de limite en $+\infty$ (voir exemple 6).

Théorème 1 **(Caractérisation séquentielle de la limite):**
f a pour limite ℓ en x_0 ssi pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **d'éléments de** *$\mathcal{D}_f$ qui tend vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ. Ce résultat est valable pour $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$.*

Preuve:
$\boxed{\Leftarrow}$ **admis.**
$\boxed{\Rightarrow}$ **Montrons que: si (u_n) tend vers x_0 et si la limite de f en x_0 est ℓ alors la suite $(f(u_n))$ tend vers ℓ.**
Preuve dans le cas où ℓ et x_0 sont réels
La limite de f en x_0 est ℓ: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\eta>0/\forall x\in\mathcal{D}_f$, $|x-x_0|<\eta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$.
Et (u_n) tend vers x_0: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,N\in\mathbb{N}/\forall n\geqslant N$, $|u_n-x_0|<\varepsilon$.
Donc en particulier pour $\eta>0$, il existe un rang N tel que $\forall n\geqslant N$, $|u_n-x_0|<\eta\Rightarrow|f(u_n)-\ell|<\varepsilon$.
Donc la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

■

POINT MÉTHODE 2 :
Utilisation de la caractérisation séquentielle pour montrer qu'une limite n'existe pas.
Pour montrer que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas, on exhibe deux suites (u_n) et (v_n) de $\mathcal{D}_f$ qui convergent vers x_0 mais telles que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ n'ont pas la même limite (ou plutôt comportement asymptotique).

Exemple 6 : Montrons que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$:

Conclusion: la limite en $+\infty$ de sinus n'existe pas.

POINT MÉTHODE 3 : Utilisation de la caractérisation séquentielle pour donner des contre-exemples.

Exemple 7 Montrons que $e^{x-\lfloor x\rfloor}$ ne tend pas vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

Donc $e^{x-\lfloor x\rfloor} \underset{x\to+\infty}{\not\longrightarrow} 1$.

Grâce à ce théorème, tous les résultats établis sur les suites se traduisent dans le cadre des fonctions réelles:

2.1 Compatibilité avec la relation d'ordre

2.1.1 Limite finie

Théorème 2 **(admis)***:*
Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble I. Soit x_0 un point ou un bord de I.
Si $\left\{\begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ ont des limites } \underline{\text{finies}} \text{ en } x_0 \\ \underline{\text{et}}\ f\leqslant g \text{ au voisinage de } x_0 \end{array}\right.$ *Alors* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Remarque 6 :
(1) Si $f<g$ au voisinage de x_0, alors en passant à la limite, l'inégalité devient LARGE: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\boxed{\leqslant}\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
(2) ATTENTION! **L'existence de la limite finie des fonctions est une HYPOTHÈSE!**
Dire que $f(x)\leqslant g(x)$ implique $\lim\limits_{x_0} f\leqslant\lim\limits_{x_0} g$ est FAUX: on doit montrer AVANT que les deux fonctions ont une limite finie.

Théorème 3 **(admis) Théorème d'encadrement:**
Soient f, g et h trois fonctions définies sur un ensemble I. Soit x_0 un point ou un bord de I.
Si $\left\{\begin{array}{l} h \text{ et } g \text{ ont la même limite } \textbf{finie}\ \ell \text{ en } x_0 \\ \underline{\text{et}}\ g\leqslant f\leqslant h \text{ au voisinage de } x_0 \end{array}\right.$ *Alors* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

Corollaire 1 **(admis):** *Si $\lim\limits_{x_0} g=0$ et f est bornée sur un voisinage de x_0 alors $\lim\limits_{x_0}(fg)=0$.*

2.1.2 Limite infinie

Proposition 3 **(admise):**
Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble I. Soit x_0 un point ou un bord de I.
On suppose que $f \leqslant g$ sur un voisinage de x_0.
(1) Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.
(2) Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Remarque 7 : ATTENTION!
(1) On n'a pas besoin d'un encadrement: une seule inégalité suffit.
(2) L'inégalité doit être dans le bon sens.

2.2 Limite des fonctions monotones

Théorème 4 **(théorème de la limite monotone):**
(1) Soit f une fonction croissante sur un intervalle $[a, b[$ $(a < b)$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
- *Si f est majorée sur $[a, b[$ alors la limite de f en b est finie.*
- *Si f est non majorée sur $[a, b[$ alors f tend vers $+\infty$ en b.*

(2) Soit f une fonction décroissante sur un intervalle $[a, b[$ $(a < b)$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
- *Si f est minorée sur $[a, b[$ alors la limite de f en b est finie.*
- *Si f est non minorée sur $[a, b[$ alors f tend vers $-\infty$ en b.*

Résultat analogue sur $]a, b]$:

Théorème 5 **:**
(1) Soit f une fonction croissante sur un intervalle $]a, b[$ $(a < b)$, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- *Si f est minorée sur $]a, b]$ alors la limite de f en a est finie.*
- *Si f est non minorée sur $]a, b]$ alors f tend vers $-\infty$ en a.*

(2) Soit f une fonction décroissante sur un intervalle $]a, b]$ $(a < b)$, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- *Si f est majorée sur $]a, b]$ alors la limite de f en a est finie.*
- *Si f est non majorée sur $]a, b]$ alors f tend vers $-\infty$ en a.*

Remarque 8 Ce théorème ne donne pas la valeur de la limite: résultat qualitatif.

Corollaire 2 *Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est croissante alors f possède en tout point de $x_0 \in]a, b[$ une limite à gauche et une limite à droite* **finies** *et:*

$$f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+)\,.$$

Exemple 8 Partie entière:

Preuve: On applique le Théorème 4 sur l'intervalle $]a, x_0[$:

■

Remarque 9 Si f est décroissante sur $]a,b[$, $f(x_0^-) \geqslant f(x_0) \geqslant f(x_0^+)$.

***Corollaire 3* (admis):** *Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ croissante. $\forall x_0, y_0 \in]a,b[$, si $x_0 < y_0$ alors $f(x_0^+) \leqslant f(y_0^-)$.*

Exemple 9 :

3 Opérations sur les limites

3.1 Fonction composée

Proposition 4 *Soient f et g deux fonctions respectivement définies sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$, avec $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. Soit x_0 un point ou un bord de $\mathcal{D}_f$.*
Si f a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en x_0 et g a une limite $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en ℓ, alors $g \circ f$ a pour limite ℓ' en x_0.

Preuve: (Utilisation de la caractérisation séquentielle de la limite)

■

Exemple 10 : $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln|x| = +\infty$.

3.2 Opérations algébriques

Rappel 3 On rappelle que F.I signifie *forme indéterminée*: on ne peut pas conclure. Pour cela, il faut <u>lever</u> l'indétermination.

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$**.**

- **Somme:**

$\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$	$\leftarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I**	
$+\infty$	$+\infty$	**F.I**	$+\infty$	
$\uparrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$				

- **Produit:**

$\lim_{x\to x_0} (f\times g)(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$\ell'\neq 0$	**0**	$\leftarrow \lim_{x\to x_0} g(x)$
$\ell\neq 0$	∞	∞	$\ell\,\ell'$	**0**	
0	**F.I**	**F.I**	**0**	**0**	
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞	**F.I**	
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞	**F.I**	
$\uparrow$ $\lim_{x\to x_0} f(x)$					

Dans le cas ∞, c'est la règle usuelle des signes qui s'applique:

$\times$ $\nearrow$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell>0$	$-\infty$	$+\infty$

- **Quotient:**

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\ell\neq 0$	$\ell=0^+$ $f(x)>0$**au vois de** x_0	$\ell=0^-$ $f(x)<0$**au vois de** x_0	$-\infty$	$+\infty$	$\ell=0$
$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0	**n'a pas de limite**

- **Puisque** $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\times\dfrac{1}{g(x)}$**, on en déduit la limite de** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **en utilisant les deux derniers tableaux.**

POINT MÉTHODE 4 : Comment lever une indétermination?

1. Pour une limite en l' INFINI, factoriser par le terme de plus haut degré (F.I du type $\dfrac{\infty}{\infty}$):

   Exemple 11 :

   (1) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x+1}$. (F.I de la forme $\frac{\infty}{\infty}$).

   (2) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+1}+2x+1$ (F.I de la forme $(+\infty)+(-\infty)$).
   Pour $x<0$,

$$\sqrt{x^2+3x+1}+2x+1 = \sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x\left(2+\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\left(2+\frac{1}{x}\right)$$

   ATTENTION! $\sqrt{x^2} = \dots$
   Donc: $\sqrt{x^2+3x+1}+2x+1 = \dots$

   (3) On regarde maintenant $\sqrt{x^2+3x+1}+x+1$ en $-\infty$.
   Pour $x<0$,

$$\sqrt{x^2+3x+1}+x+1 = \sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x\left(1+\frac{1}{x}\right) = |x|\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$= x\left(1+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right).$$

   Or, dans ce cas, $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = 1-1=0$, et on récupère une autre F.I de la forme $0\times\infty$

2. Pour une limite en l' INFINI, penser à la quantité conjuguée (F.I du type $+\infty+(-\infty)$):

Exemple 12

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+3x+1}+x+1 &= \dots \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+3x+1}-(x+1)} \\ &= \dots\end{aligned}$$

Avec $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x} = 1+1 = 2 > 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+1}+x+1 = -\frac{1}{2}$.

3. Pour une limite en $x_0 \in \mathbb{R}$, factoriser par le plus PETIT degré de $(x-x_0)$:

   Exemple 13 Limite en 0^+ de $f(x) = \dfrac{x+x^2}{\sqrt{x+x^2}}$ (F.I de la forme $\frac{0}{0}$).

4. Utiliser les comparaisons de fonctions:

   Remarque 10 : ATTENTION!
   Pour les fonctions de la forme $u(x) = f(x)^{g(x)}$: PASSER À L'EXPONENTIELLE!!
   Sinon, le risque est de ne pas voir l'indétermination et d'écrire de grosses bêtises...

4 Comparaison de fonctions

4.1 Croissances comparées

Théorème 6 **(admis):**
$\forall \alpha, \beta > 0$, $\forall a > 1$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0}$$

Remarque 11 Pour l'exponentielle de base e: $\forall \alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$.
On retrouve la limite usuelle: $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.

Remarque 12 On dit que $\boxed{\text{en } +\infty}$ les fonctions logarithme sont négligeables devant les fonctions puissances, elles-mêmes négligeables devant les fonctions exponentielles. On note aussi:

$$\forall \alpha > 0\,,\ \beta > 0\,,\ a > 1\,,\ (\ln x)^\beta \underset{+\infty}{<<} x^\alpha \underset{+\infty}{<<} a^x = e^{x\ln a}\,.$$

Remarque 13 En passant à l'inverse: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} = +\infty}$
On retrouve la limite usuelle: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Exemple 14 :
(1) On retrouve la limite usuelle: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
(2) Pour tout polynôme P, $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)e^{-x} = 0$. En effet:

Proposition 5 $\forall \alpha > 0$, $\forall a > 1$, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha a^x = 0}$

Preuve:

$\blacksquare$

Proposition 6 $\forall \alpha > 0$, $\forall \beta > 0$, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0}$

Preuve:

$\blacksquare$

Remarque 14 On retrouve la limite usuelle: $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

4.2 Fonctions équivalentes

4.3 Définition

Définition 3 *Soient f et g deux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*
On dit que f **est équivalente à** *g* **en** *a lorsque:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \,.$$

On note alors $\boxed{f \underset{a}{\sim} g}$

Remarque 15 Lorsque f est équivalente à g en a, g est aussi équivalente à f en a donc, sans précision d'ordre, on peut dire: f et g sont équivalentes en a.

Remarque 16 Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$, $f \underset{a}{\sim} \ell$ signifie ...
Si $\ell = 0$, $\boxed{\text{NE JAMAIS écrire } f \underset{a}{\sim} 0!!!}$

Exemple 15 : le terme de plus haut degré l'emporte en l'infini.
(1) $2x^2 + x + 1 \underset{+\infty}{\sim} 2x^2$, en effet:

(2) $-5x^3 + x^2 - 1 \underset{-\infty}{\sim} \ldots$
(3) **Tout polynôme est équivalent en l'infini à son monôme de plus haut degré:**

$$a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \underset{\pm\infty}{\sim} a_p x^p \text{ , avec } \boxed{a_p \neq 0}$$

Proposition 7 :
(1) Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; f et g deux fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a. Soit une fonction h.
Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x \to b} h(x) = a$ alors: $f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$.
(2) Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; f et g deux fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a. Soit (u_n) une suite réelle.
Si la suite u a pour limite a et $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f(u_n) \sim g(u_n)$.

Preuve:

$\blacksquare$

Exemple 16 : équivalents usuels.

$$\boxed{\sin(x) \underset{0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{0}{\sim} x \qquad \cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \qquad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \qquad \sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x}{2} \qquad \arctan x \underset{0}{\sim} x}$$

Plus généralement: $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $\boxed{(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha\, x}$

Exemple 17 $\ln(1 + \sin x) \underset{0}{\sim} \sin x$, car ...

Remarque 17 On retrouve ainsi les limites usuelles: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

4.4 Propriétés

Proposition 8 **:** *Sous les bonnes hypothèses,*
(1) Transitivité: si $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $g \underset{a}{\sim} h$ *alors* $f \underset{a}{\sim} h$.
(2) Multiplication par un réel non nul: pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, *si* $f \underset{a}{\sim} g$ *alors* $\lambda f \underset{a}{\sim} \lambda g$.
(3) Produit: si $f \underset{a}{\sim} h$ *et* $g \underset{a}{\sim} u$ *alors* $f\, g \underset{a}{\sim} h\, u$.
(4) Quotient: si $f \underset{a}{\sim} h$ *et* $g \underset{a}{\sim} u$ *alors* $\dfrac{f}{g} \underset{a}{\sim} \dfrac{h}{u}$.

Preuve: Il s'agit d'utiliser les opérations sur les limites:

POINT MÉTHODE 5 :
Dans un calcul de limite, on peut remplacer, sans hésiter, une fonction par l'un de ses équivalents dans un produit, un quotient.

Exemple 18 :
(1) Quotient de deux polynômes: $\dfrac{2x^2 + 5x - 1}{(3x-1)(1-x)}$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin(\dfrac{x+1}{x^2})$:

Proposition 9 **(composées):** *Sous les bonnes hypothèses,*
(1) Valeur absolue: $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow |f| \underset{a}{\sim} |g|$.
(2) Puissance entière: $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow f^p \underset{a}{\sim} g^p$, *pour tout* $p \in \mathbb{N}$.
(3) Puissance réelle constante: si $f, g > 0$ *au voisinage de* a *et* $f \sim g \Rightarrow f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$, *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.

POINT MÉTHODE 6 :
Dans un calcul de limite, on peut remplacer, sans hésiter, une fonction par l'un de ses équivalents dans une élévation à une puissance constante.

Remarque 18 ATTENTION: $\boxed{\text{ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS!}}$
contre-exemple: $x^2 + 1 \underset{+\infty}{\sim} {}^2$ et $-x^2 - 3 \underset{+\infty}{\sim} -x^2$ MAIS $x^2 + 1 - x^2 - 3 \underset{+\infty}{\sim} x^2 - x^2$?

Remarque 19 ATTENTION aux EXPONENTIELLES et au LOGARITHME:
∗ $\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow e^{f(x)} \underset{a}{\sim} e^{g(x)}$.
∗ Si $f \underset{a}{\sim} g$ avec $f, g > 0$ au voisinage de a, et $\lim_{x\to a} v_n = L \neq 1$ (avec $L \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$) alors $\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$.

POINT MÉTHODE 7 Dans un calcul de limite, dans une somme ou une différence ou encore pour composer avec une fonction (comme l'exponentielle, le logarithme, le sinus, ..., mais pas l'élévation à une puissance constante), une étude particulière s'impose car il n'existe pas de résultat général.

4.5 Applications

4.5.1 Recherche de limite

Proposition 10 *Si f a pour limite ℓ en a, où $\ell \neq 0$ alors $f \underset{a}{\sim} \ell$.*

Théorème 7 *Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim_{x\to a} g(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = L$.*

4.5.2 Recherche de signe

Théorème 8 *Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors f et g sont de même signe au voisinage de a.*