# Limites

BCPST 1C – Mme MOREL

## Introduction: Notion de voisinage

Quand on dit que Julien et Nicolas habitent dans le même voisinage, cela signifie que leurs maisons sont "proches" l'une de l'autre:

En mathématiques, c'est pareil: un réel $x$ est dans un voisinage de $x_0$ si $x$ et $x_0$ sont "proches l'un de l'autre", au sens où:
• si $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[ \ (|x - x_0| < \eta), \text{ ou bien } x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \ (|x - x_0| \leqslant \eta).$$

• si $x_0 = +\infty$: un réel $x$ est dans un *voisinage de* $+\infty$ si $x$ est suffisamment grand:

$$\exists A \in \mathbb{R} / x \in ]A, +\infty[ \text{ (ou } [A, +\infty[).$$

• si $x_0 = -\infty$: un réel $x$ est dans un *voisinage de* $-\infty$ si $x$ est négatif et $|x|$ est suffisamment grand:

$$\exists B \in \mathbb{R} / x \in ]-\infty, B[ \text{ (ou } ]-\infty, B]).$$

*(On réserve "suffisamment petit" pour $x$ dans un voisinage de $0$)*
Conclusion:

| |
|---|
| Les voisinages de $x_0 \in \mathbb{R}$ sont de la forme: $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$; $\eta > 0$ |
| Les voisinages de $+\infty$ sont de la forme: $]A, +\infty[$, $[A, +\infty[$; $A \in \mathbb{R}$ |
| Les voisinages de $-\infty$ sont de la forme:$]-\infty, B[$, $]-\infty, B]$; $B \in \mathbb{R}$. |

*(la notion de voisinage fait un zoom en un point. Un voisinage de $+\infty$ est équivalent à la notion APCR chez les suites)*

## 1 Définitions

Dans cette partie, $f$ désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur son ensemble de définition, noté $\mathcal{D}_f$.

### 1.1 Limite en un point

On considère la limite de $f$ en un réel $x_0$ qui est soit un point de $\mathcal{D}_f$, soit un bord de $\mathcal{D}_f$.

**Exemple 1 :** $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$.
$x_0 = 2 \in \mathcal{D}_f$ est un point de $\mathcal{D}_f$; $x_0 = 1 \notin \mathcal{D}_f$ est un bord de $\mathcal{D}_f$.

### 1.1.1 Limite finie

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$:

Intuitivement, $f(x)$ tend vers $\ell$ quand $x$ tend vers $x_0$ signifie que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de $\ell$ ($f(x)$ dans un voisinage de $\ell$) quand $x$ est suffisamment proche de $x_0$ ($x$ est dans un voisinage assez petit de $x_0$), ou encore tout intervalle de $\ell$ (ou voisinage de $\ell$) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez proche de $x_0$:

| | |
|---|---|
| $(*)$ | Pour tout voisinage de $\ell$ (fixé), on peut trouver un voisinage de $x_0$ sur lequel $f(x)$ reste dans le voisinage de $\ell$ donné au départ. |

Traduction de $(*)$:
un voisinage de $\ell$ étant de la forme: $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$, $f(x) \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ ($|f(x) - \ell| < \varepsilon$).
un voisinage de $x_0$ étant de la forme: $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $\eta > 0$, $x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ (traduction de "sur lequel").
Donc $(*)$ s'écrit:

***Définition 1*** *On dit que $f$* **a pour limite $\ell$ en $x_0$** *ssi:*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists \eta > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\,,\, |f(x) - \ell| < \varepsilon}$$

*On note* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$, $\lim_{x_0} f = \ell$.

**Remarque 1 :**
(1) On peut prendre des inégalités larges et intervalles fermés (voir l'introduction sur les voisinages).
(2) ATTENTION!! $\eta$ dépend de $\varepsilon$! Le voisinage de $x_0$ dépend de celui de $\ell$ qu'on s'est donné au départ.

*(On peut voir $\varepsilon$ comme la tolérance ou la marge d'erreur qu'on s'autorise autour de $\ell$)*

**Exemple 2** $\lim_{x \to 0} 2x + 1 = 1$.
En effet:

$\forall \varepsilon > 0$, on cherche $\eta > 0$ tel que $\forall x \in ] - \eta, \eta[$, $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

■

**Remarque 2 : ATTENTION!**
La limite ne dépend pas de $x$! Écrire $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} x$ n'a aucun sens!

### 1.1.2 Limite infinie

$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$, $\ell\in\{-\infty,+\infty\}$:

On reprend $(*)$ en changeant les voisinages: l'idée est la même, seules les voisinages changent.
voisinage de $+\infty$: $]A,+\infty[$, $A\in\mathbb{R}$.
voisinage de $-\infty$: $]-\infty,B[$, $B\in\mathbb{R}$.

***Définition 2* :**
*(1) On dit que $f$* **a pour limite $+\infty$ en $x_0$** *ssi:*

$$\boxed{\forall A\in\mathbb{R}\,,\ \exists\eta>0/\forall x\in\mathcal{D}_f\cap]x_0-\eta,x_0+\eta[\,,\ f(x)\geqslant A}$$

*On note* $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $f(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}+\infty$, $\lim_{x_0} f=+\infty$.
*(2) On dit que $f$* **a pour limite $-\infty$ en $x_0$** *ssi:*

$$\boxed{\forall B\in\mathbb{R}\,,\ \exists\eta>0/\forall x\in\mathcal{D}_f\cap]x_0-\eta,x_0+\eta[\,,\ f(x)\leqslant B}$$

*On note* $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, $f(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}-\infty$, $\lim_{x_0} f=-\infty$.

**Exemple 3 :** $\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$.
En effet:

$\blacksquare$

### 1.1.3 Limites à gauche, à droite

Parfois, $x$ tend vers $x_0$ "sous contrainte":
(1) On impose à $x$ de rester "à gauche" de $x_0$, i.e $x<x_0$. Ce qui revient à considérer la limite en $x_0$ de la restriction de $f$ à $\mathcal{D}_f\cap]-\infty,x_0[$:
*Si la restriction de $f$ à $\mathcal{D}_f\cap]-\infty,x_0[$ admet une limite finie ou infinie en $x_0$, on dit que $f$ admet une* **limite à gauche en** $x_0$, *et on note* $\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f(x)=\ell$ ou $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell$, où $\ell\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Si $\ell$ *est finie*, on note aussi $\boxed{f(x_0^-)=\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f(x)}$

(2) De la même manière, on parle de **limite à droite en $x_0$:** $\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} f(x)}$ **ou** $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$**, où** $\ell\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$**; si** $\ell\in\mathbb{R}$**, on la note** $\boxed{f(x_0^+)}$

***Proposition 1*** **(admise):**
*(1) Soit $x_0$ un* **bord de** *$\mathcal{D}_f$, "intérieur" à $\mathcal{D}_f$ au sens où: $\exists\alpha > 0/]x_0-\alpha, x_0[\cup]x_0, x_0+\alpha[\subset \mathcal{D}_f$.*
*$f$ a pour limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ en $x_0$ ssi les limites à gauche et à droite de $f$ en $x_0$ sont égales à $\ell$:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \ell = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)\,.$$

*(2) Si $x_0 \in \mathcal{D}_f$, "intérieur" à $\mathcal{D}_f$, $f$ a pour limite $f(x_0)$ en $x_0$ ssi les limites à gauche et à droite de $f$ en $x_0$ sont égales à $\boxed{f(x_0)}$:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)\,.$$

**Remarque 3 : ATTENTION!**
Si $x_0 \in \mathcal{D}_f$ et les limites à gauche et à droite de $f$ en $x_0$ sont égales à $\ell$, la limite de $f$ en $x_0$ n'existe pas forcément!
Tout dépend: $\ell = f(x_0)$? En effet, à retenir:

$$\boxed{\text{si } x_0 \in \mathcal{D}_f \text{ et la limite de } f \text{ existe en } x_0 \text{ et vaut } \ell \text{ } (\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell) \text{ alors } \ell = f(x_0)}$$

On peut avoir ce cas de figure:

**Exemple 4** Étudions la limite de $\lfloor -|x| \rfloor$ en 0:

**Exemple 5 :**
(1) Valeur absolue: $|x| = \left| \begin{array}{ll} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{array} \right.$

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} |x| = \boxed{0 = |0|} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} |x|$, donc la limite en 0 de $|x|$ existe et vaut: $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} |x| = 0}$
(2) Partie entière: $\lfloor x \rfloor = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \in [0,1[ \\ -1 & \text{si } x \in [-1,0[ \end{array} \right.$

**POINT MÉTHODE 1 :**
**utilisation des limites à droite et à gauche pour montrer qu'une limite en un point n'existe pas.**

donc **la fonction partie entière n'admet pas de limite en** $0$.

$\lim\limits_{x\to 0} \lfloor x \rfloor$ *n'existe pas! Pourtant, elle est* **définie** *en* $0$*!!!*

**Remarque 4 : ATTENTION!**

**CE N'EST PAS PARCE QU'UNE FONCTION EST DEFINIE EN UN POINT QU'ELLE ADMET FORCEMENT UNE LIMITE EN CE POINT.**

## 1.2 Limite en l'infini

### 1.2.1 Limite en $+\infty$

**Rappel 1** Voisinage de $+\infty$: $]A, +\infty[$, $A \in \mathbb{R}$.

***Traduction de (∗):***

| $\ell \in \mathbb{R}: \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ | $\ell = +\infty: \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ | $\ell = -\infty: \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ |
|---|---|---|
| $\forall \varepsilon > 0$**,** $\exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap ]A, +\infty[$ $\lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$**.** <br> <u>**Exemple:**</u> $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ | $\forall B \in \mathbb{R}$**,** $\exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap ]A, +\infty[$ $f(x) > B$**.** <br> <u>**Exemple:**</u> $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ | $\forall B \in \mathbb{R}$**,** $\exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap ]A, +\infty[$ $f(x) < B$**.** <br> <u>**Exemple:**</u> $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x = -\infty$ |

### 1.2.2 Limite en $-\infty$

**Rappel 2** Voisinage de $-\infty$: $]-\infty, B[$, $B \in \mathbb{R}$.

***Traduction de (∗):***

| $\ell \in \mathbb{R}: \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ | $\ell = +\infty: \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ | $\ell = -\infty: \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ |
|---|---|---|
| $\forall \varepsilon > 0$**,** $\exists B \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap ]-\infty, B[$ $\lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$**.** <br> <u>**Exemple:**</u> $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ | $\forall A \in \mathbb{R}$**,** $\exists B \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap ]-\infty, B[$ $f(x) > A$**.** <br> <u>**Exemple:**</u> $\lim\limits_{x\to-\infty} \lvert x \rvert = +\infty$ | $\forall A \in \mathbb{R}$**,** $\exists B \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap ]-\infty, B[$ $f(x) < A$**.** <br> <u>**Exemple:**</u> $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ |

# 2 Propriétés

***Proposition 2*** *On suppose que $f$ possède une limite* $\boxed{\textit{finie}}$ *($\ell \in \mathbb{R}$) en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors:*
*(1) La limite est unique. (admis)*
*(2) $f$ est bornée sur un voisinage de $x_0$:*
- *$x_0 \in \mathbb{R}$: $\exists \eta > 0$, $\exists M > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $\lvert f(x) \rvert \leqslant M$.*
- *$x_0 = +\infty$: $\exists A \in \mathbb{R}$, $\exists M > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap ]A, +\infty[$, $\lvert f(x) \rvert \leqslant M$.*
- *$x_0 = -\infty$: $\exists B \in \mathbb{R}$, $\exists M > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f \cap ]-\infty, B[$, $\lvert f(x) \rvert \leqslant M$.*

*(3) Si $a < \ell < b$ alors $a < f(x) < b$ pour tout réel $x$ au voisinage de $x_0$. (admis)*
*(4) Si $\ell > 0$ alors $f$ ne s'annule pas au voisinage de $x_0$: on peut minorer $f$ par $\dfrac{\ell}{2} > 0$.*

**Preuve:**
**(2)** $\forall \varepsilon > 0$**, il existe un voisinage de** $x_0$ **noté** $V_\varepsilon$**, tel que** $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap V_\varepsilon$, $\lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$**.**
**On prend** $\varepsilon = \ldots\ldots$**, alors** $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap V_1$, $\lvert f(x) \rvert = \ldots$
**(4)** $\forall \varepsilon > 0$**, il existe un voisinage de** $x_0$ **noté** $V_\varepsilon$**, tel que** $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap V_\varepsilon$, $\lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon \Rightarrow f(x) > \ell - \varepsilon$**.**
**On prend** $\varepsilon = \ldots\ldots$**, alors** $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap V_{\frac{\ell}{2}}$, $f(x) > \ldots$

∎

**Remarque 5 : ATTENTION!**
La réciproque de (2) est fausse! Toute fonction bornée n'admet pas forcément de limite.
Contre-exemple: la fonction sinus est bornée sur $\mathbb{R}$, mais n'a pas de limite en $+\infty$ (voir exemple 6).

***Théorème 1*** **(Caractérisation séquentielle de la limite):**
*$f$ a pour limite $\ell$ en $x_0$ ssi pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **d'éléments de** *$\mathcal{D}_f$ qui tend vers $x_0$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell$.*
*Ce résultat est valable pour $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$.*

**Preuve:**
$\boxed{\Leftarrow}$ **admis.**
$\boxed{\Rightarrow}$ **Montrons que: si $(u_n)$ tend vers $x_0$ et si la limite de $f$ en $x_0$ est $\ell$ alors la suite $(f(u_n))$ tend vers $\ell$.**
*Preuve dans le cas où $\ell$ et $x_0$ sont réels*
**La limite de $f$ en $x_0$ est $\ell$: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\eta>0/\forall x\in\mathcal{D}_f$, $|x-x_0|<\eta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$.**
**Et $(u_n)$ tend vers $x_0$: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,N\in\mathbb{N}/\forall n\geqslant N$, $|u_n-x_0|<\varepsilon$.**
**Donc en particulier pour $\eta>0$, il existe un rang $N$ tel que $\forall n\geqslant N$, $|u_n-x_0|<\eta \Rightarrow |f(u_n)-\ell|<\varepsilon$.**
**Donc la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell$.**

■

**POINT MÉTHODE 2 :**
**Utilisation de la caractérisation séquentielle pour montrer qu'une limite n'existe pas.**
Pour montrer que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas, on exhibe deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ de $\mathcal{D}_f$ qui convergent vers $x_0$ mais telles que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ n'ont pas la même limite (ou plutôt comportement asymptotique).

**Exemple 6 :** Montrons que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$:

Conclusion: la limite en $+\infty$ de sinus n'existe pas.

**POINT MÉTHODE 3 : Utilisation de la caractérisation séquentielle pour donner des contre-exemples.**

**Exemple 7** Montrons que $e^{x-\lfloor x\rfloor}$ ne tend pas vers 1 quand $x$ tend vers $+\infty$.

Donc $e^{x-\lfloor x\rfloor} \underset{x\to+\infty}{\not\longrightarrow} 1$.

*Grâce à ce théorème, tous les résultats établis sur les suites se traduisent dans le cadre des fonctions réelles:*

## 2.1 Compatibilité avec la relation d'ordre

### 2.1.1 Limite finie

***Théorème 2*** **(admis)***:*
*Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un ensemble $I$. Soit $x_0$ un point ou un bord de $I$.*
*Si* $\left\{\begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ ont des limites } \underline{\text{finies}} \text{ en } x_0 \\ \underline{\text{et}}\ f\leqslant g \text{ au voisinage de } x_0\end{array}\right.$ *Alors* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

**Remarque 6 :**
(1) Si $f<g$ au voisinage de $x_0$, alors en passant à la limite, l'inégalité devient LARGE: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \boxed{\leqslant} \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
(2) ATTENTION! **L'existence de la limite finie des fonctions est une HYPOTHÈSE!**
Dire que $f(x)\leqslant g(x)$ implique $\lim\limits_{x_0} f \leqslant \lim\limits_{x_0} g$ est FAUX: on doit montrer AVANT que les deux fonctions ont une limite finie.

***Théorème 3*** **(admis) Théorème d'encadrement:**
*Soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies sur un ensemble $I$. Soit $x_0$ un point ou un bord de $I$.*
*Si* $\left\{\begin{array}{l} h \text{ et } g \text{ ont la même limite } \textbf{finie } \ell \text{ en } x_0 \\ \underline{\text{et}}\ g\leqslant f\leqslant h \text{ au voisinage de } x_0\end{array}\right.$ *Alors* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

***Corollaire 1*** **(admis):** *Si $\lim\limits_{x_0} g = 0$ et $f$ est bornée sur un voisinage de $x_0$ alors $\lim\limits_{x_0}(fg) = 0$.*

### 2.1.2 Limite infinie

***Proposition 3*** **(admise):**
*Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un ensemble $I$. Soit $x_0$ un point ou un bord de $I$.*
*On suppose que $f \leqslant g$ sur un voisinage de $x_0$.*
*(1) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.*
*(2) Si $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.*

**Remarque 7 : ATTENTION!**
(1) On n'a pas besoin d'un encadrement: une seule inégalité suffit.
(2) L'inégalité doit être dans le bon sens.

## 2.2 Limite des fonctions monotones

***Théorème 4*** **(théorème de la limite monotone):**
*(1) Soit $f$ une fonction croissante sur un intervalle $[a, b[$ $(a < b)$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*
- *Si $f$ est majorée sur $[a, b[$ alors la limite de $f$ en $b$ est finie.*
- *Si $f$ est non majorée sur $[a, b[$ alors $f$ tend vers $+\infty$ en $b$.*

*(2) Soit $f$ une fonction décroissante sur un intervalle $[a, b[$ $(a < b)$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*
- *Si $f$ est minorée sur $[a, b[$ alors la limite de $f$ en $b$ est finie.*
- *Si $f$ est non minorée sur $[a, b[$ alors $f$ tend vers $-\infty$ en $b$.*

*Résultat analogue sur $]a, b]$:*

***Théorème 5*** **:**
*(1) Soit $f$ une fonction croissante sur un intervalle $]a, b[$ $(a < b)$, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.*
- *Si $f$ est minorée sur $]a, b]$ alors la limite de $f$ en $a$ est finie.*
- *Si $f$ est non minorée sur $]a, b]$ alors $f$ tend vers $-\infty$ en $a$.*

*(2) Soit $f$ une fonction décroissante sur un intervalle $]a, b]$ $(a < b)$, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.*
- *Si $f$ est majorée sur $]a, b]$ alors la limite de $f$ en $a$ est finie.*
- *Si $f$ est non majorée sur $]a, b]$ alors $f$ tend vers $-\infty$ en $a$.*

**Remarque 8** Ce théorème ne donne pas la valeur de la limite: résultat qualitatif.

***Corollaire 2*** *Si $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ est croissante alors $f$ possède en tout point de $x_0 \in ]a, b[$ une limite à gauche et une limite à droite* **finies** *et:*

$$f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+)\,.$$

**Exemple 8** Partie entière:

**Preuve: On applique le Théorème 4 sur l'intervalle $]a, x_0[$:**

■

**Remarque 9** Si $f$ est décroissante sur $]a,b[$, $f(x_0^-) \geqslant f(x_0) \geqslant f(x_0^+)$.

***Corollaire 3* (admis):** *Soit* $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ *croissante.* $\forall x_0, y_0 \in ]a,b[$, *si* $x_0 < y_0$ *alors* $f(x_0^+) \leqslant f(y_0^-)$.

**Exemple 9 :**

# 3 Opérations sur les limites

## 3.1 Fonction composée

***Proposition 4*** *Soient* $f$ *et* $g$ *deux fonctions respectivement définies sur* $\mathcal{D}_f$ *et* $\mathcal{D}_g$, *avec* $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. *Soit* $x_0$ *un point ou un bord de* $\mathcal{D}_f$.
*Si* $f$ *a une limite* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *en* $x_0$ *et* $g$ *a une limite* $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *en* $\ell$, *alors* $g \circ f$ *a pour limite* $\ell'$ *en* $x_0$.

**Preuve: (Utilisation de la caractérisation séquentielle de la limite)**

$\blacksquare$

**Exemple 10 :** $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln|x| = +\infty$.

## 3.2 Opérations algébriques

**Rappel 3** On rappelle que F.I signifie *forme indéterminée*: on ne peut pas conclure. Pour cela, il faut <u>lever</u> l'indétermination.

**Soit** $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$**.**

- **Somme:**

| $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$ | $\ell' \in \mathbb{R}$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\leftarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\ell \in \mathbb{R}$ | $\ell + \ell'$ | $-\infty$ | $+\infty$ | |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | **F.I** | |
| $+\infty$ | $+\infty$ | **F.I** | $+\infty$ | |
| $\uparrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ | | | | |

- **Produit:**

| $\lim\limits_{x\to x_0}(f\times g)(x)$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\ell'\neq 0$ | $\mathbf{0}$ | $\leftarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ell\neq 0$ | $\infty$ | $\infty$ | $\ell\,\ell'$ | $\mathbf{0}$ | |
| $0$ | **F.I** | **F.I** | $\mathbf{0}$ | $\mathbf{0}$ | |
| $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\infty$ | **F.I** | |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\infty$ | **F.I** | |
| $\uparrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | | | | | |

**Dans le cas $\infty$, c'est la règle usuelle des signes qui s'applique:**

| $\times$ $\nearrow$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $\ell<0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell>0$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

- **Quotient:**

| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | $\ell\neq 0$ | $\ell=0^+$ $f(x)>0$**au vois de** $x_0$ | $\ell=0^-$ $f(x)<0$**au vois de** $x_0$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\ell=0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}$ | $\dfrac{1}{\ell}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $0$ | **n'a pas de limite** |

- **Puisque** $\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x)\times\dfrac{1}{g(x)}$**, on en déduit la limite de** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **en utilisant les deux derniers tableaux.**

**Rappel 4** On relève 4 indéterminations: $\boxed{0\times\infty,(+\infty)+(-\infty),\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}}$

**POINT MÉTHODE 4 : Comment lever une indétermination?**

1. Pour une limite en l' INFINI, factoriser par le terme de plus haut degré (F.I du type $\dfrac{\infty}{\infty}$):

   **Exemple 11 :**

   (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}$. (F.I de la forme $\frac{\infty}{\infty}$).

   (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3x+1}+2x+1$ (F.I de la forme $(+\infty)+(-\infty)$).
   Pour $x<0$,

   $$\sqrt{x^2+3x+1}+2x+1=\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x\left(2+\frac{1}{x}\right)=\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\left(2+\frac{1}{x}\right)$$

   ATTENTION! $\sqrt{x^2}=\dots$
   Donc: $\sqrt{x^2+3x+1}+2x+1=\dots$

   (3) On regarde maintenant $\sqrt{x^2+3x+1}+x+1$ en $-\infty$.
   Pour $x<0$,

   $$\begin{aligned}\sqrt{x^2+3x+1}+x+1=\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x\left(1+\frac{1}{x}\right)&=|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\left(1+\frac{1}{x}\right)\\&=x\left(1+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right).\end{aligned}$$

   Or, dans ce cas, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}-\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=1-1=0$, et on récupère une autre F.I de la forme $0\times\infty$

2. Pour une limite en l' INFINI, penser à la quantité conjuguée (F.I du type $+\infty + (-\infty)$):

   **Exemple 12**

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+3x+1}+x+1 &= \dots \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+3x+1}-(x+1)} \\ &= \dots\end{aligned}$$

   Avec $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x} = 1+1 = 2 > 0$, donc $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+1}+x+1 = -\frac{1}{2}$.

3. <u>Pour une limite en $x_0 \in \mathbb{R}$, factoriser par le plus PETIT degré de $(x-x_0)$:</u>

   **Exemple 13** Limite en $0^+$ de $f(x) = \dfrac{x+x^2}{\sqrt{x}+x^2}$ (F.I de la forme $\frac{0}{0}$).

4. Utiliser les comparaisons de fonctions:

   **Remarque 10 : ATTENTION!**
   Pour les fonctions de la forme $u(x) = f(x)^{g(x)}$: PASSER À L'EXPONENTIELLE!!
   Sinon, le risque est de ne pas voir l'indétermination et d'écrire de grosses bêtises...

# 4 Comparaison de fonctions

## 4.1 Croissances comparées

***Théorème 6* (admis):**
$\forall \alpha, \beta > 0$, $\forall a > 1$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0}$$

**Remarque 11** Pour l'exponentielle de base $e$: $\forall \alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$.
On retrouve la limite usuelle: $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.

**Remarque 12** On dit que $\boxed{\text{en } +\infty}$ les fonctions logarithme sont négligeables devant les fonctions puissances, elles-mêmes négligeables devant les fonctions exponentielles. On note aussi:

$$\forall \alpha > 0\,,\ \beta > 0\,,\ a > 1\,,\ (\ln x)^\beta \underset{+\infty}{<<} x^\alpha \underset{+\infty}{<<} a^x = e^{x\ln a}\,.$$

**Remarque 13** En passant à l'inverse: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} = +\infty}$

On retrouve la limite usuelle: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

**Exemple 14 :**
(1) On retrouve la limite usuelle: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
(2) Pour tout polynôme $P$, $\lim_{x\to+\infty} P(x)e^{-x} = 0$. En effet:

***Proposition 5*** $\forall \alpha > 0$, $\forall a > 1$, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha a^x = 0}$

**Preuve:**

■

***Proposition 6*** $\forall \alpha > 0$, $\forall \beta > 0$, $\boxed{\lim_{x \to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0}$

**Preuve:**

■

**Remarque 14** On retrouve la limite usuelle: $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

## 4.2 Fonctions équivalentes

## 4.3 Définition

***Définition 3*** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*
*On dit que $f$* **est équivalente à** *$g$* **en** *$a$ lorsque:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,.$$

*On note alors* $\boxed{f \underset{a}{\sim} g}$

**Remarque 15** Lorsque $f$ est équivalente à $g$ en $a$, $g$ est aussi équivalente à $f$ en $a$ donc, sans précision d'ordre, on peut dire: $f$ et $g$ sont équivalentes en $a$.

**Remarque 16** Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$, $f \underset{a}{\sim} \ell$ signifie ...
Si $\ell = 0$, $\boxed{\text{NE JAMAIS écrire } f \underset{a}{\sim} 0!!!}$

**Exemple 15 : le terme de plus haut degré l'emporte en l'infini.**
(1) $2x^2 + x + 1 \underset{+\infty}{\sim} 2x^2$, en effet:

(2) $-5x^3 + x^2 - 1 \underset{-\infty}{\sim} \ldots$
(3) **Tout polynôme est équivalent en l'infini à son monôme de plus haut degré:**

$$a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \underset{\pm\infty}{\sim} a_p x^p \text{ , avec } \boxed{a_p \neq 0}$$

***Proposition 7 :***
*(1) Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; $f$ et $g$ deux fonctions ne s'annulant pas au voisinage de $a$. Soit une fonction $h$.*
*Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim_{x \to b} h(x) = a$ alors: $f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$.*
*(2) Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; $f$ et $g$ deux fonctions ne s'annulant pas au voisinage de $a$. Soit $(u_n)$ une suite réelle.*
*Si la suite $u$ a pour limite $a$ et $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f(u_n) \sim g(u_n)$.*

**Preuve:**

■

**Exemple 16 : équivalents usuels.**

$$\boxed{\sin(x) \underset{0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{0}{\sim} x \qquad \cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \qquad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \qquad \sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}}$$

Plus généralement: $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $\boxed{(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha\, x}$

**Exemple 17** $\ln(1+\sin x) \underset{0}{\sim} \sin x$, car ...

**Preuve: On admet (pour l'instant) que** $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ **et** $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$**.**

■

**Remarque 17** On retrouve ainsi les limites usuelles: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

## 4.4 Propriétés

***Proposition 8*** **:** *Sous les bonnes hypothèses,*
*(1) Transitivité: si* $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $g \underset{a}{\sim} h$ *alors* $f \underset{a}{\sim} h$.
*(2) Multiplication par un réel non nul: pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}^*$*, si* $f \underset{a}{\sim} g$ *alors* $\lambda f \underset{a}{\sim} \lambda g$.
*(3) Produit: si* $f \underset{a}{\sim} h$ *et* $g \underset{a}{\sim} u$ *alors* $f\, g \underset{a}{\sim} h\, u$.
*(4) Quotient: si* $f \underset{a}{\sim} h$ *et* $g \underset{a}{\sim} u$ *alors* $\frac{f}{g} \underset{a}{\sim} \frac{h}{u}$.

**Preuve: Il s'agit d'utiliser les opérations sur les limites:**

**POINT MÉTHODE 5 :**
Dans un calcul de limite, on peut remplacer, sans hésiter, une fonction par l'un de ses équivalents dans un produit, un quotient.

**Exemple 18 :**

(1) Quotient de deux polynômes: $\dfrac{2x^2+5x-1}{(3x-1)(1-x)}$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(\dfrac{x+1}{x^2})$:

***Proposition 9* (composées):** *Sous les bonnes hypothèses,*
*(1) Valeur absolue:* $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow |f| \underset{a}{\sim} |g|$.
*(2) Puissance entière:* $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow f^p \underset{a}{\sim} g^p$*, pour tout* $p \in \mathbb{N}$.
*(3) Puissance réelle constante: si* $f, g > 0$ *au voisinage de* $a$ *et* $f \sim g \Rightarrow f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$*, pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.

**POINT MÉTHODE 6 :**
Dans un calcul de limite, on peut remplacer, sans hésiter, une fonction par l'un de ses équivalents dans une élévation à une puissance constante.

**Remarque 18** ATTENTION: $\boxed{\text{ON NE SOMME PAS LES ÉQUIVALENTS!}}$
*contre-exemple:* $x^2+1 \underset{+\infty}{\sim} {}^2$ et $-x^2-3 \underset{+\infty}{\sim} -x^2$ MAIS $x^2+1-x^2-3 \underset{+\infty}{\sim} x^2-x^2$?

**Remarque 19** ATTENTION aux EXPONENTIELLES et au LOGARITHME:
$*$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)-g(x)=0 \Rightarrow e^{f(x)} \underset{a}{\sim} e^{g(x)}$.
$*$ Si $f \underset{a}{\sim} g$ avec $f, g > 0$ au voisinage de $a$, et $\lim\limits_{x\to a} v_n = L \neq 1$ (avec $L \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$) alors $\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$.

**POINT MÉTHODE 7** Dans un calcul de limite, dans une somme ou une différence ou encore pour composer avec une fonction (comme l'exponentielle, le logarithme, le sinus, ..., mais pas l'élévation à une puissance constante), une étude particulière s'impose car il n'existe pas de résultat général.

## 4.5 Applications

### 4.5.1 Recherche de limite

***Proposition 10*** *Si* $f$ *a pour limite* $\ell$ *en* $a$*, où* $\ell \neq 0$ *alors* $f \underset{a}{\sim} \ell$.

***Théorème 7*** *Si* $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*, alors* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

### 4.5.2 Recherche de signe

***Théorème 8*** *Si* $f \underset{a}{\sim} g$ *alors* $f$ *et* $g$ *sont de même signe au voisinage de* $a$.