

Calcul de limites

I. Calcul de limites.

Exercice 1 Étudier la limite en 0 des fonctions suivantes:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice 2 (*) Soient a, b deux réels et f la fonction:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Comment choisir a et b de sorte que : f ait une limite en 1 et que la limite en 1 de $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ existe et soit finie.

Exercice 3 Déterminer, si elles existent, les limites suivantes:

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left x + \frac{1}{x} \right $ | 11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\ln(x^2 + 1)} - \sqrt{\ln(x^2 - 1)}$ | 22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(e^x)}{x^2 + 1}$ | 23. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{(x^2 + 2)^{1/3}}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x - e^{1/x}}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \sin x}$ | 24. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^3 - 1}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} - e^{3x} + x^2$ | 14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x]$ | 25. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x - 1)}{\sin(x - 2)}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x} - \frac{1}{x} + x - e^{x^2}$ | 15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x - 1} - \frac{x^2}{x + 1}$ | 26. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \tan(2x)$ |
| 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + 2x + 7}{e^x + e^{-x}}$ | 16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - \sqrt{x}}$ | 27. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos(x)}{x - 2 \sin(x)}$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{4x} - e^x - 1}{x^4 + 2x + 1}$ | 17. $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x + \sqrt{x})$ | 28. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ |
| 8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 e^{-x^2}$ | 18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$ | 29. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ |
| 9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - 3x$ | 19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan x)}{\sqrt{\sin x}}$ | 30. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{\frac{1}{2x^3}}$ |
| 10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x$ | 20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos(2x)}$ | 31. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\ln x}$ |
| | 21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$ | |

Exercice 4 Déterminer un équivalent en $+\infty$ de :

$$(1) \sqrt{x^2 + 1} - x \quad (2) \ln\left(\frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 - 5x + 7}\right)$$

II. Caractérisation séquentielle de la limite.

Exercice 5 (*)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T > 0$. On suppose que f admet une limite finie, notée l , en $+\infty$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. On considère la suite u définie par $u_n = f(x + nT)$ pour tout entier n .

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite en fonction de l .

(b) Montrer que u est constante.

2. En déduire que f est constante.

Exercice 6 (*)

1. Montrer que la fonction $(x \mapsto \cos(\frac{1}{x}))$ n'a pas de limite en 0.
2. Montrer que la fonction $(x \mapsto 2 - \cos x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.
3. Étudier la limite de $(x \mapsto e^x \sin x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.