Calcul de limites

I. Calcul de limites.

Exercice 1 Étudier la limite en 0 des fonctions suivantes:

$$f(x)=\begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x\geqslant 0\\ 1-e^x & \text{si } x<0\end{cases}$$

Exercice 2 $(*)$ Soient a,b deux réels et f la fonction:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<1\\ ax+b & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$$

Comment choisir a et b de sorte que : f ait une limite en 1 et que la limite en 1 de $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ existe et soit finie.

Exercice 3 Déterminer, si elles existent, les limites suivantes:

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x\,\cos(e^x)}{x^2+1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-\sqrt{x}}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan x)}{\sqrt{\sin x}}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{1-\cos(2x)}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}$.
9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$
10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3-1}}{(x^2+2)^{1/3}}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^3-1}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{\sin(x-2)}$
13. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x\,\tan(2x)$
14. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\cos(x)}{x-2\sin(x)}$.
15. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
16. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^x$
17. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1+x^2)^{\frac{1}{2x^3}}$
18. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln x}$

Exercice 4 Déterminer un équivalent en $+\infty$ de :

$$(1)\ \sqrt{x^2+1}-x\qquad (2)\ \ln\left(\frac{2x^2-x+1}{2x^2-5x+7}\right)$$

II. Caractérisation séquentielle de la limite.

Exercice 5 :
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T>0$. On suppose que f admet une limite finie, notée l, en $+\infty$.

1. Soit $x\in\mathbb{R}$ quelconque. On considère la suite u définie par $u_n=f(x+nT)$ pour tout entier n.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite en fonction de l.
   (b) Montrer que u est constante.
2. En déduire que f est constante.

Exercice 6 :

1. Montrer que la fonction $(x\mapsto\cos(\dfrac{1}{x}))$ n'a pas de limite en 0.
2. Montrer que la fonction $(x\mapsto 2-\cos x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.
3. Etudier la limite de $(x\mapsto e^x\,\sin x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.