# CONTINUITÉ

BCPST 1C – Mme MOREL

## 1 Continuité en un point

### 1.1 Continuité

***Définition 1*** *Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. Soit $x_0$ un* $\boxed{\textit{élément}}$ *de $\mathcal{D}_f$: $x_0 \in \mathcal{D}_f$.*
*Si la limite de $f$ en $x_0$ existe et vaut $f(x_0)$, on dit que $f$* **est continue en** *$x_0$.*
*Dans le cas contraire, on dit que $f$* **est discontinue en** *$x_0$.*

*(La continuité en un point n'est donc ni plus ni moins qu'une limite*

**Remarque 1** On peut remplacer " la limite de $f$ en $x_0$ existe et vaut $f(x_0)$" par "la limite de $f$ en $x_0$ existe et est finie".
En effet, si $f$ admet une limite *finie* en $x_0$, cette limite ne peut être que $f(x_0)$.
**Preuve:** Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors on a:

$$\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists \eta > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f\,,\, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

En particulier pour $x = x_0$: $\forall \varepsilon > 0$, $|f(x_0) - \ell| < \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il vient (à la limite): $f(x_0) = \ell$.

■

***Définition 2*** *Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.*
*Soit $x_0$ un* $\boxed{\textit{élément}}$ *de $\mathcal{D}_f$, $x_0 \in \mathcal{D}_f$, tel que:*
*(1) $\exists \eta > 0$ tel que $[x_0, x_0 + \eta[ \subset \mathcal{D}_f$.*
*$f$ est* **continue à droite en** *$x_0$ si $f$ admet une limite à droite en $x_0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$.*
*(2) $\exists \eta > 0$ tel que $]x_0 - \eta, x_0] \subset \mathcal{D}_f$.*
*$f$ est* **continue à gauche en** *$x_0$ si $f$ admet une limite à gauche en $x_0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$.*

**Rappel 1** Si $x_0$ est un point "intérieur" à $\mathcal{D}_f$, au sens où:
$x_0 \in \mathcal{D}_f$ et $\exists \alpha > 0 / ]x_0 - \alpha, x_0[ \cup ]x_0, x_0 + \alpha[ \subset \mathcal{D}_f$, alors

$$\boxed{f \text{ est continue en } x_0 \text{ ssi } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)}$$

($f$ est continue en $x_0$ ssi $f$ est continue à droite et à gauche en $x_0$)

**Exemple 1 :**
(1) La fonction valeur absolue est définie en 0. Est-elle continue en 0?

(2) La fonction partie entière est définie en 0. Est-elle continue en 0?

**Remarque 2** ATTENTION!!!!
Une fonction ne peut être continue qu'en un point où elle est définie, MAIS:

**CE N'EST PAS PARCE QU'UNE FONCTION EST DEFINIE EN UN POINT QU'ELLE EST FORCEMENT CONTINUE EN CE POINT.**

Et si la fonction n'est pas définie en $x_0$:

## 1.2 Prolongement par continuité

***Définition 3*** *Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. Soit $x_0$ un* $\boxed{\textit{bord}}$ *de $\mathcal{D}_f$: $x_0 \notin \mathcal{D}_f$. Si $f$ admet une limite* **finie** *en $x_0$, notée $\ell$, on dit que $f$* **est prolongeable par continuité en** *$x_0$ par la fonction:*

$$\begin{array}{rcl} \overline{f} : \mathcal{D}_f \cup \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left| \begin{array}{ll} f(x) & \textit{si } x \neq x_0\,, \\ \ell & \textit{si } x = x_0\,. \end{array} \right. \end{array}$$

*La fonction $\overline{f}$ s'appelle* **le prolongement par continuité de** *$f$.*

**Remarque 3 :**
(1) $\overline{f}$ est continue en $x_0$, en effet:

(2) Par abus de notation, on continue souvent à noter ce prolongement $f$ au lieu de $\overline{f}$.

**Exemple 2 :**
(1) La fonction $f : x \mapsto x \ln x$ est définie sur $]0, +\infty[$, donc non définie en 0. Est-elle prolongeable par continuité en 0?

(2) La fonction $(x \mapsto \dfrac{\sin x}{x})$ est prolongeable par continuité en 0 car ...
Ecrire son prolongement $\overline{f}$:

(3) La fonction $(x \mapsto x \cos(\dfrac{1}{x}))$ est prolongeable par continuité en 0 car ...
Ecrire son prolongement $\overline{f}$:

**Exemple 3** Considérons la fonction puissance $(x \mapsto x^\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, définie sur $]0, +\infty[$. Est-elle prolongeable par continuité en 0?

# 2 Continuité sur un intervalle

## 2.1 Définition

***Définition 4*** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et $I$ un intervalle non vide inclus dans $\mathcal{D}_f$.*
*On dit que $f$ est* **continue sur** *$I$ si elle est continue en tout point de $I$. On note* $\boxed{f \in \mathcal{C}(I)}$ *ou* $\boxed{f \in \mathcal{C}^0(I)}$

**Exemple 4 :**

- Les fonctions sinus, cosinus, valeur absolue, exponentielle, puissances $(x \mapsto x^n)$, $n \in \mathbb{N}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions logarithme et puissances $(x \mapsto x^\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sont continues sur $]0, +\infty[$.
- La fonction racine est continue sur $[0, +\infty[$.
- La fonction inverse est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
- La fonction tangente est continue sur chaque intervalle $]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi[$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

**Lecture graphique 1** "il n'y a pas de trou: on ne lève pas le stylo pour tracer la courbe":

## 2.2 Opérations et continuité

### 2.2.1 Opérations algébriques

***Proposition 1*** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un même intervalle $I$.*
*(1) $f + g$ est continue sur $I$.*
*(2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f$ est continue sur $I$.*
*(3) $f\,g$ est continue sur $I$.*
*(4) Si $f$ ne s'annule pas sur $I$, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue sur $I$.*

**Preuve:** Traduction des résultats établis au sur les limites.

■

**Exemple 5 :**
(1) $\boxed{\text{Une fonction polynômiale est continue sur } \mathbb{R}}$ en tant que somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$:

$$P(x) = a_0 + a_1\,x + \ldots + a_n\,x^n\,.$$

$\forall p \in [|0, n|]$, $(x \mapsto x^p)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc par produit par un réel, $(x \mapsto a_p\,x^p)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc par somme, $P$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit une fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où $P$ et $Q$ sont deux fonctions polynômes.
On note $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_q$ les racines de $Q$. Donc $\mathcal{D}_f = \ldots\ldots$
$f$ est continue sur ...

**Exemple 6** $\left(x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$ est continue sur ......; $\left(x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}\right)$ est continue sur .......

### 2.2.2 Composition de la continuité

***Proposition 2* (Composée):** *Soient $f \in \mathcal{C}(I)$, $g \in \mathcal{C}(J)$ et $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est continue sur $I$.*

**Preuve:** Traduction du chapitre sur les limites.

■

**Exercice 1 :**
(1) $(x \mapsto \ln|x|)$ est continue sur ...... en tant que composée de fonctions continues.

(2) $\left(x \mapsto e^{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}\right)$ est continue sur ...... en tant que composée de fonctions continues.

### 2.2.3 Caractérisation séquentielle de la continuité

***Proposition 3*** *Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. Soit $x_0$ un $\boxed{\text{élément}}$ de $\mathcal{D}_f$: $x_0 \in \mathcal{D}_f$.*
*$f$ est continue en $x_0$ SSI pour toute suite $(u_n)$ d'éléments de $\mathcal{D}_f$ qui converge vers $x_0$, la suite $(f(u_n))_n$ converge vers $f(x_0)$.*

**Preuve:** c'est la caractérisation séquentielle de la limite vue pour les limites.

■

**POINT MÉTHODE 1 :**

**Etude de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f$ est continue sur $\mathcal{D}_f$ (détaillée en TD)**

Soit $I$ un intervalle non vide inclus dans $\mathcal{D}_f$ tel que $f(I) \subset I$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ et si $(u_n)$ converge vers $\ell$, $\ell$ vérifie alors l'équation $f(\ell) = \ell$: on dit que $\ell$ est un **point fixe** de $f$.

**POINT MÉTHODE 2 : justifier la discontinuité d'une fonction en un point**

$*$ Pour la discontinuité en $x_0$: il suffit de trouver une suite $(u_n)$ d'éléments de $\mathcal{D}_f$ qui converge vers $x_0$ mais telle que la suite image $(f(u_n))_n$ ne converge pas vers $f(x_0)$.

$*$ Pour le prolongement par continuité en $x_0$:
il suffit de trouver deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ d'éléments de $\mathcal{D}_f$ qui convergent vers $x_0$ mais telles que leurs suites images $(f(u_n))_n$ et $(f(v_n))_n$ n'ont pas la même limite. Dans ce cas, $f$ n'est pas prolongeable par continuité en $x_0$.

**Exemple 7** Considérons $f(x) = \sin^2(\frac{1}{x})$ en 0: est-elle prolongeable par continuité?

# 3 Etude d'une fonction continue sur un intervalle

## 3.1 Image d'un intervalle

***Théorème 1*** **: Théorème des valeurs intermédiaires (TVI), ADMIS.**
*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. Soient deux réels $a$ et $b$ appartenant à $I$ tels que $a < b$.*
*Pour tout réel $k$ compris (au sens large) entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.*

**Remarque 4 :**
*Au sens large* signifie que les cas $k = f(a)$ ou $k = f(b)$ sont possibles.
*$k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ ne signifie pas $f(a) \leqslant k \leqslant f(b)$* car on n'a pas forcément $f(a) \leqslant f(b)$!!

**POINT MÉTHODE 3 : Montrer qu'une fonction s'annule (au moins une fois) sur un intervalle.**
C'est l'utilisation du TVI pour $k = 0$.

**Exemple 8** Si $f$ est continue sur un intervalle $I$ et change de signe sur $I$ alors $f$ s'annule sur $I$.
En effet:

*Application:* Tout polynôme de degré impair s'annule sur $\mathbb{R}$.

*Application:* $\boxed{\text{si } f \text{ est continue sur un intervalle } I \text{ et ne s'annule pas sur } I \text{ alors } f \text{ est de signe constant sur } I}$
En effet:

**Exemple 9** Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue.

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution (point fixe).

**Remarque 5 ATTENTION!**
le TVI dit que l'équation $f(x) = k$ admet AU MOINS une solution dans $[a, b]$ si $k$ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$: aucune indication sur l'unicité de la solution!

***Corollaire 1* (ADMIS):** *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

**Remarque 6 :**
(1) La nature de l'intervalle (ouvert, borné, etc...) n'est pas forcément conservée.

**Exemple 10** $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$.

(2) ATTENTION! Quand la fonction n'est pas continue, l'image d'un intervalle n'est pas forcément un intervalle!
*contre-exemple:* L'image de $\mathbb{R}$ par la fonction partie entière est $\mathbb{Z}$.

## 3.2 Cas particulier: image d'un segment

Dans ce paragraphe, une fonction $f$ est continue sur un intervalle de la forme $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$, qu'on appelle **segment**.

***Théorème 2* (ADMIS):** *Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.*

En d'autres termes, si $f$ est continue sur $[a, b]$ alors $f$ admet un minorant et un majorant qui sont atteints: on les appelle dans ce cas minimum et maximum (cf chapitre 2):

$$\boxed{\begin{array}{c}\exists \underline{c} \in [a, b], \overline{c} \in [a, b] / \forall x \in [a, b], f(\underline{c}) \leqslant f(x) \leqslant f(\overline{c}).\\ \text{On note } f(\underline{c}) = \min\limits_{[a,b]} f \text{ et } f(\overline{c}) = \max\limits_{[a,b]} f.\end{array}}$$

**Remarque 7 :**
(1) Ce résultat n'est plus vrai sur un intervalle!!!
Contre-exemple: ln sur $]0, +\infty[$, exp sur $\mathbb{R}$, ...
(2) On a $f(\underline{c}) \leqslant f(\overline{c})$ mais pas forcément $\underline{c} \leqslant \overline{c}$!!!

***Corollaire 2* :** *L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*

**Preuve:** Montrons que $\boxed{f([a, b]) = [f(\underline{c}), f(\overline{c})]}$
$\boxed{\subset}$ clair: vient directement du Théorème 2.
$\boxed{\supset}$ $f$ étant continue sur l'intervalle $[a, b]$, d'après le Corollaire 1, $f([a, b])$ est aussi un intervalle.
Or $f(\underline{c}) \in f([a, b])$, $f(\overline{c}) \in f([a, b])$ et $f(\underline{c}) \leqslant f(\overline{c})$, donc $[f(\underline{c}), f(\overline{c})] \subset f([a, b])$.

∎

**Remarque 8** ATTENTION! Ne pas confondre $f([a, b])$ et $[f(a), f(b)]$. Toutefois ...
- Si $f$ est croissante sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = \ldots$
- Si $f$ est décroissante sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = \ldots$

### 3.3 Continuité et stricte monotonie: bijection

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.

**Rappel 2 (Chapitre 7):** $f$ est surjective de $I$ dans ....
De plus, si $f$ est continue sur $I$, alors $f(I)$ est un intervalle (Corollaire 1).

**Rappel 3 (Chapitre 8):** Si $f$ est strictement monotone sur $I$ alors $f$ est ...

***Proposition 4* :**
*Si $f$ est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I$ alors $f$ réalise une bijection de $I$ dans l'intervalle image $J = f(I)$.*
*La bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue, strictement monotone (de même monotonie que $f$) sur $J$.*

**Preuve:** On admet que $f^{-1}$ est continue sur $J$.
On suppose que $f$ est strictement croissante *(refaire la preuve dans le cas strictement décroissante).*

■

**POINT MÉTHODE 4 : comment déterminer $J = f(I)$?**
$f$ est continue sur $I$ donc $f(I)$ est un intervalle et puisque $f$ est strictement monotone, on distingue les cas suivants: $(a, b \in \mathbb{R})$

| $I$ | $f(I)$ si $f$ est strictement croissante | $f(I)$ si $f$ est strictement décroissante |
|---|---|---|
| $[a,b]$ | $[f(a), f(b)]$ | $[f(b), f(a)]$ |
| $[a,b[$ | $[f(a), f(b)[$ | $]f(b), f(a)]$ |
| $]a,b]$ | $]f(a), f(b)]$ | $[f(b), f(a)[$ |
| $]a,b[$ | $]f(a), f(b)[$ | $]f(b), f(a)[$ |
| $[a,+\infty[$ | $[f(a), \lim\limits_{+\infty} f[$ | $]\lim\limits_{+\infty} f, f(a)]$ |
| $]a,+\infty[$ | $]f(a), \lim\limits_{+\infty} f[$ | $]\lim\limits_{+\infty} f, f(a)[$ |
| $]-\infty,b]$ | $]\lim\limits_{-\infty} f, f(b)]$ | $[f(b), \lim\limits_{-\infty} f[$ |
| $]-\infty,b[$ | $]\lim\limits_{-\infty} f, f(b)[$ | $]f(b), \lim\limits_{-\infty} f[$ |
| $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$ | $]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f[$ | $]\lim\limits_{+\infty} f, \lim\limits_{-\infty} f[$ |

**POINT MÉTHODE 5 : continuité et monotonie de la réciproque SANS LA CONNAÎTRE.**

**Exemple 11 Fonction racine nième:** $(x \mapsto \sqrt[n]{x})$

**Exemple 12** Considérons la fonction puissance $g(x) = x^\alpha$, $\forall x > 0$.
$g$ est continue et strictement monotone sur $]0, +\infty[$, donc réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans $g(]0, +\infty[)$.

**Exemple 13 Fonctions circulaires réciproques:**

$*$ $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ est continue et strictement croissante donc:
Arcsinus est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$

$*$ $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est continue et strictement décroissante donc:
Arccosinus est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$

**Exemple 14 :**
$*$ $\tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante donc:

$$\boxed{\text{Arctangente est continue et strictement croissante sur } \mathbb{R}}$$

$*$ Tableaux de variations:

**Remarque 9** Si l'expression de $f^{-1}$ est demandée, il faut revenir à la méthode: pour tout $y \in F$, on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$. On montre qu'elle admet une unique solution $x = f^{-1}(y)$.

***Théorème 3*** **Théorème de bijection:**
*Si $f$ est continue et strictement monotone sur un intervalle $I$, alors $\forall k \in J = f(I)$, l'équation $f(x) = k$ admet une* **unique** *solution dans $I$.*

**Remarque 10 :**
(1) le TVI donnait au moins une solution à l' équation $f(x) = k$, alors que le théorème de bijection en donne l'existence et l'UNICITE.
Par contre, la valeur de cette solution n'est toujours pas connue ...
(2) ATTENTION! Ne pas oublier de vérifier que $k$ appartient à l'intervalle image $J$!!!
(sinon l'équation $e^x = -2$ a une solution sur $\mathbb{R}$...)

**POINT MÉTHODE 6 : applications du théorème de bijection.**
1. Montrer qu'une fonction s'annule une seule fois (a un seul zéro) sur un intervalle.
2. Montrer que l'équation $f(x) = k$ a une UNIQUE solution (sans donner sa valeur!) sur un intervalle $I$, <u>avec $k \in f(I)$</u>.
3. Suites implicites: la suite $(x_n)$ est définie comme l'unique solution d'une équation du type $f(x) = n$.

**Exemple 15** Etudier la fonction $f : x \mapsto x^3 - x + 1$ et démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle $\alpha$ telle que : $\alpha \in ]-2, -1[$.