

# Fonctions réelles d'une variable réelle – DÉRIVATION

BCPST 1C – Mme MOREL

## 1 Fonctions dérivables

### 1.1 Dérivée en un point

**Définition 1** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0 \in I$ .

On dit que  $f$  est **dérivable en  $x_0$**  si la limite de  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  quand  $x$  tend vers  $x_0$  existe et est finie. Cette limite s'appelle le **nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$** , on le note  $f'(x_0)$ :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

**Exemple 1 :**

(1) Fonction constante:  $f(x) = c \forall x \in \mathbb{R}$ .

Alors  $\forall x_0 \in \mathbb{R}, f'(x_0) = 0$ . *En effet:*

(2) Fonction identité sur  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = x \forall x \in \mathbb{R}$ .

Alors  $\forall x_0 \in \mathbb{R}, f'(x_0) = 1$ . *En effet:*

(3) Fonction carrée:  $f(x) = x^2 \forall x \in \mathbb{R}$ .

Alors  $\forall x_0 \in \mathbb{R}, f'(x_0) = 2x_0$ . *En effet:*

(4) Fonction racine:  $f(x) = \sqrt{x} \forall x \geq 0$ .

Alors  $\forall x_0 > 0, f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ .

*En effet:*

**Remarque 1 :**

(1) L'expression  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  est appelée **taux d'accroissement**.

(2) Par le changement de variable  $h = x - x_0$ , on peut se ramener à une limite en 0:  $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ .

**Lecture graphique 1 :**

**Définition 2** Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , la droite d'équation  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  est la **tangente** au graphe de  $f$  en  $x_0$ .

**Remarque 2** Si  $f(x) \geq (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0))$  (resp.  $\leq$ ), la courbe est au dessus (resp. en dessous) de sa tangente en  $x_0$ .

**Exemple 2** Graphe de la fonction racine à l'origine:

On note que la droite d'équation  $x = 0$  est tangente au graphe de la fonction racine en 0.

Conclusion:

Si  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$  alors le graphe de  $f$  admet une tangente **verticale** en  $x_0$ :  $f$  **n'est pas dérivable** en  $x_0$

**Remarque 3** Attention:

UNE FONCTION N'EST PAS FORCEMENT DERIVABLE LA OU ELLE EST DEFINIE!!!

**Définition 3** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0 \in I$ ,  $x_0$  n'étant pas une extrémité de  $I$ .

On dit que  $f$  est **dérivable à droite** (resp. **à gauche**) en  $x_0$  si le taux d'accroissement  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en  $x_0$ . On note alors:

$$\boxed{f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

**Remarque 4** Le chapitre sur les limites entraîne:

$f$  est dérivable en  $x_0$  ssi  $f$  est dérivable à droite et à gauche en  $x_0$  et  $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Dans ce cas, on a:  $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ .

**Exemple 3** Fonction valeur absolue en 0.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Lecture graphique 2 :**

Conclusion:

Si  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  n'existe pas car les limites à gauche et à droite existent et sont finies mais différentes, alors le graphe de  $f$  n'a pas de tangente en  $x_0$  c'est-à-dire: le graphe de  $f$  a un "pic" en  $x_0$ .  
( $f$  n'est pas dérivable en  $x_0$ ).

**Proposition 1** Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  alors  $f$  est continue en  $x_0$ .

**Preuve:**

**Remarque 5 :**

(1) LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE!!

Contre-exemples: fonctions racine et valeur absolue sont continues en 0, mais d'après ce qui précède, elles ne sont pas dérivables en 0

(2) LA CONTRAPOSEE EST VRAIE: si  $f$  n'est pas continue en  $x_0$  alors elle n'est pas dérivable en  $x_0$ . ■

## 1.2 Fonction dérivée

**Définition 4** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

On dit que  $f$  est dérivable sur  $I$  si  $f$  est dérivable en tout point  $x_0$  de  $I$ . On définit alors la fonction dérivée de  $f$  sur  $I$  par:

$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

On note aussi parfois la fonction  $f'$  par:  $\frac{df}{dx}$ .

**Remarque 6**  $f$  est dérivable sur  $[a, b]$  ( $a < b$ ) ssi  $f$  est dérivable en tout point de  $]a, b[$  et est dérivable à gauche en  $b$  et à droite en  $a$ .

**Exemple 4** La fonction racine est dérivable sur  $]0, +\infty[$  (mais continue sur  $[0, +\infty[$ );  
la fonction valeur absolue est dérivable sur  $] - \infty, 0[$  ET SUR  $]0, +\infty[$  (mais continue sur  $\mathbb{R}$ );  
la fonction carrée est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 7** ATTENTION À LA RÉDACTION!

On dérive une **fonction** et non un nombre:  $f'(x) \neq f(x)!!!!$

L'écriture  $(x^2)'$  NE SERA PAS ACCEPTÉE dans une copie. Il faut nommer la fonction carrée  $f : x \mapsto x^2$  puis calculer  $f'(x)$ .

**Exemple 5 : dérivabilité d'un prolongement par continuité (zoom en un point).**

(1) Considérons  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ,  $\forall x \in ]0, 2\pi]$ .

Par encadrement,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , donc  $f$  est prolongeable par continuité en 0, et par abus de notation, on note  $f(0) = 0$ .

Donc  $f$  est continue sur  $[0, 2\pi]$ .

ATTENTION!! Cet exemple montre bien que limite du taux d'accroissement  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$  et limite de la dérivée  $f'(x)$ , c'est

pas pareil...

En effet:  $f'$  n'a pas de limite en  $0^+$  puisque  $\cos \frac{1}{x}$  n'en a pas.

(2) Considérons  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x|x|$ .

Montrons que  $f$  et  $f'$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ .

1.  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  par produit de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ .
2.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ :

## 1.3 Opérations

### 1.3.1 Opérations algébriques

**Proposition 2** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur un même intervalle  $I$ .

(1)  $f + g$  est dérivable sur  $I$  et  $(f + g)' = f' + g'$ .

(2)  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f$  est dérivable sur  $I$  et  $(\lambda f)' = \lambda f'$ .

(3)  $f g$  est dérivable sur  $I$  et  $(f g)' = f' g + f g'$ .

(4) Si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$  alors  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont dérivables sur  $I$  et  $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$  et  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2}$ .

**Preuve:** soit  $x_0 \in I$ .

■

**Exemple 6 :**

(1) Considérons  $f(x) = x^n, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ .

Montrons par récurrence que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $f'(x) = n x^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}$ .

(2) Toute fonction polynômiale est dérivable sur  $\mathbb{R}$

Soit  $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Alors  $P$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (en tant que somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ ), et:

$$P'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + na_n x^{n-1} = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} \text{ (dérivation terme à terme)}$$

On remarque que  $\deg P' = \deg P - 1$

(3) Considérons la fonction inverse  $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0$ .

$f$  est dérivable sur  $]-\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$  (en tant que quotient dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces deux intervalles),

et  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \forall x \neq 0$ .

(4)  $\tan = \frac{\sin}{\cos}$  est dérivable sur chaque intervalle de  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  en tant que:

\* quotient de fonctions dérivables:  $\tan' = \dots$

\* produit de fonctions dérivables:  $\tan' = \dots$

Conclusion:  $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

**1.3.2 Composée**

**Proposition 3** Soient  $f$  une fonction dérivable sur  $I$ ,  $g$  dérivable sur  $J$  avec  $f(I) \subset J$ .

Alors  $g \circ f$  est dérivable sur  $I$  et  $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$ .

**Preuve:**  $\forall x \neq x_0$ ,

■

**Exemple 7 :**

(1) Considérons  $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n, \forall x \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}$ .

Donc  $f = h \circ g$  avec  $h(x) = x^n$  et  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

(on retrouve donc la même formule que pour  $x^n, n \in \mathbb{N}, \dots$ )

(2) Si  $f$  est dérivable sur  $I$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f^n$  est dérivable sur  $I$  et  $(f^n)' = n f^{n-1} f'$ .

(3) Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $f(x) > 0 \forall x \in I$ , alors  $\sqrt{f}$  est dérivable sur  $I$  et  $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$ .

(4) Si  $f$  est dérivable sur  $I$  alors  $\sin f$  et  $\cos f$  sont dérivables sur  $I$  et  $(\sin f)' = f' \cos f$  et  $(\cos f)' = -f' \sin f$ .

**Proposition 4** Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $f$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $\ln |f|$  est dérivable sur  $I$ , et  $(\ln |f|)' = \frac{f'}{f}$ .

**Preuve:**

**Remarque 8 :**

(1) ATTENTION! Ce théorème donne une condition SUFFISANTE mais pas une condition NÉCESSAIRE!!

Il est possible de faire des opérations sur des fonctions non dérivables et d'obtenir une fonction dérivable.

contre-exemple:  $f(x) = \sqrt{x^4} = x^2$  est dérivable en 0

contre-exemple:  $g(x) = (\sqrt{x})^2 = x$  est dérivable en 0

(2) Moyen mémotechnique pour retenir cette formule:  $\frac{d(g \circ f)}{dx} = \frac{dg}{df} \times \frac{df}{dx}$ .

### 1.3.3 Fonction réciproque

**Rappel 1 (chapitre 20):** si  $f$  est continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  alors  $f^{-1}$  est continue sur l'intervalle image  $J = f(I)$ .

Donc la continuité "se transmet" de  $f$  à  $f^{-1}$ , et la dérivation?

Graphiquement, on rappelle que les courbes représentatives  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$  sont symétriques par rapport à la première bissectrice  $y = x$ . Donc si  $f$  a une tangente horizontale en un point (i.e.  $f'(a) = 0$ ) alors  $f^{-1}$  aura une tangente verticale en l'image de ce point et ne sera donc pas dérivable...

Conclusion: si  $f^{-1}$  est dérivable en  $a$  alors  $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$  (pas de tangente horizontale pour  $f$ !). C'est aussi une condition suffisante:

**Théorème 1** Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ .

(donc, d'après le chapitre 20,  $f$  réalise une bijection de  $I$  dans l'intervalle image  $J = f(I)$ ).

Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

**Preuve:**  $\forall y_0 \in J$ , montrons que le taux d'accroissement  $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$  a une limite finie quand  $y$  tend vers  $y_0$ .

### Exemple 8 :

(1) •  $\ln$  est bijective de  $]0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ , et sa dérivée ne s'annule pas sur  $]0, +\infty[$ .

Donc la fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et:

• Si  $u$  est dérivable sur  $I$  alors  $e^u$  est dérivable sur  $I$  et  $(e^u)' = u' e^u$ .

En particulier,  $u(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $\forall x > 0: u'(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$ .

(2) **Fonctions racines nième:**  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  définie sur  $\mathbb{R}$  si  $n$  est impair,  $]0, +\infty[$  si  $n$  est pair.

### Exemple 9 : Fonction arctan.

Tangente est continue et dérivable et strictement croissante sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , et  $\tan'(x) =$

. Donc:

$\arctan \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$
---

## 2 Étude des fonctions dérivables sur un intervalle

### 2.1 Extrema locaux

Soient  $f$  une fonction définie sur  $I$  et  $x_0 \in I$ .

**Définition 5** On dit que  $f$  admet un **extremum local** en  $x_0$  s'il existe un voisinage de  $x_0$  sur lequel  $f(x_0)$  est soit un maximum soit un minimum:

$\exists \alpha > 0 / \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I, \underbrace{f(x) \leq f(x_0)}_{\text{max}} \text{ ou } \underbrace{f(x) \geq f(x_0)}_{\text{min}}$ .

**Remarque 9** si  $x_0$  est une extrémité de  $I$ , on remplace "local" par "local à gauche" ou "local à droite".

**Proposition 5** Soient  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $x_0 \in I$  qui n'est pas une extrémité de  $I$ . Si  $f$  possède un extremum (local) en  $x_0$  alors  $f'(x_0) = 0$ .

### Remarque 10 :

(1) La tangente est donc horizontale en  $x_0$ .

Exemple: la fonction carrée en 0:

(2) Toutes les hypothèses sont nécessaires:

\* une fonction non dérivable en  $x_0$  peut présenter un extremum local en  $x_0$ : la fonction valeur absolue en 0.

\* Si  $x_0$  est une extrémité,  $f$  peut avoir un extremum en  $x_0$  sans que la dérivée soit nulle:  $id_{[0,1]}$  en 1.  
(3) LA RECIPROQUE EST FAUSSE!!! Si  $f'(x_0) = 0$  alors  $x_0$  n'est pas forcément un extremum.  
contre-exemple: la fonction cube en 0:

(4) LA CONTRAPOSÉE EST VRAIE: si  $f'(x_0) \neq 0$  alors  $x_0$  n'est pas un extremum (local) de  $f$ .

**Preuve:** Supposons que  $x_0$  est un point de minimum local:

■  
**Proposition 6** Soient  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $x_0 \in I$  **qui n'est pas une extrémité de  $I$** .  
Si  $f'(x_0) = 0$  et si  $f'$  **change de signe en  $x_0$** , alors  $f$  possède un extremum local en  $x_0$ .

**Preuve:** On suppose que il existe  $\alpha > 0$  tel que:

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]x_0, x_0 + \alpha[ \quad \text{et} \quad f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in ]x_0 - \alpha, x_0[.$$

Alors  $f$  est croissante sur  $]x_0, x_0 + \alpha[$  et décroissante sur  $]x_0 - \alpha, x_0[$ , donc  $f$  a un minimum local en  $x_0$ .  
■

## 2.2 Théorème de Rolle

### Lecture graphique 3

**Théorème 2 (théorème de Rolle):** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $a < b$ ), continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ .  
Si  $f(a) = f(b)$  alors  $\exists c \in ]a, b[ / f'(c) = 0$ .

**Remarque 11 :**

(1)  $c$  dépend de  $a$  et  $b$  et n'est pas forcément unique!

(2) Toutes les hypothèses sont nécessaires:

\*  $f$  dérivable sur  $]a, b[$ : la valeur absolue sur  $[-1, 1]$ .

\*  $f(a) = f(b)$ : fonction identité sur  $[0, 1]$ .

(3) Le théorème s'étend au cas où  $a = -\infty$  ou  $b = +\infty$  en remplaçant  $f(a)$  par  $\lim_{-\infty} f \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  ou  $f(b)$  par  $\lim_{+\infty} f \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

**Preuve:**

■

**POINT MÉTHODE 1 : montrer qu'une dérivée s'annule sur un intervalle.**

**Exemple 10** Soit un polynôme  $P$  ayant deux racines distinctes  $a$  et  $b$  ( $P(a) = P(b) = 0$ ). Alors  $P'$  s'annule au moins une fois.

## 2.3 Théorème des accroissements finis et applications

### 2.3.1 Théorème (ou TAF)

Lecture graphique 4

**Théorème 3 (théorème des accroissements finis ou TAF):** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $a < b$ ) continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ .

Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**Preuve:**

■

### 2.3.2 Application 1: Obtention d'encadrements

**Corollaire 1 (inégalité des accroissements finis ou IAF):** Soient  $a, b$  deux réels tels que  $a < b$ . Si:

\*  $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,

\*  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ ,

\*  $f'$  est bornée sur  $]a, b[$ : il existe deux réels  $m, M$  tels que  $\forall x \in ]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$ ,

alors:  $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

**Preuve:**

**Corollaire 2** Soit une fonction  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$ .

Si il existe  $K > 0$  tel que  $\forall x \in I, |f'(x)| \leq K$ , alors:  $|\forall a, b \in I, |f(b) - f(a)| \leq K|b - a|$

**Preuve:** On utilise le corollaire précédent avec  $m = -K$  et  $M = K$ .

### POINT MÉTHODE 2 :

(1) **Application aux suites**  $u_{n+1} = f(u_n)$  (convergence et calcul de la limite): cf TD.

(2) **Obtention d'encadrements:**

**Exemple 11**  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\ln$  est continue sur  $[n, n+1]$  et dérivable sur  $]n, n+1[$ .

Donc par le TAF, il existe  $c_n \in ]n, n+1[$  tel que  $\ln(n+1) - \ln(n) = \dots$

Or  $c_n \in ]n, n+1[$  donc  $\frac{1}{c_n} \in \dots$  donc

Soit:  $\forall n \geq 1, \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$

donc en sommant:

### 2.3.3 Application 3: variations des fonctions dérivables

**Théorème 4** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

(1)  $f$  est croissante sur  $I$  ssi  $f' \geq 0$  sur  $I$ .

(2)  $f$  est décroissante sur  $I$  ssi  $f' \leq 0$  sur  $I$ .

(3)  $f$  est constante sur  $I$  ssi  $f'(x) = 0, \forall x \in I$ .

**Remarque 12** Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , ce théorème s'applique: le signe de  $f'$  sur  $]a, b[$  donne la monotonie de  $f$  sur  $[a, b]$ .

**Exemple 12** La fonction racine est continue sur  $[0, +\infty[$ , dérivable sur  $]0, +\infty[$ , de dérivée  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0, \forall x > 0$ .

Donc la fonction racine est (strictement) croissante sur  $[0, +\infty[$ .

**Preuve:**

(1)

- (2) On reprend (1) avec  $-f$ .  
 (3)  $f$  est constante donc à la fois croissante et décroissante sur  $I$ .

■

**Remarque 13 ATTENTION!!**

Il est très important de se trouver sur un INTERVALLE...

**Exemple 13** Considérons  $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$ .  
 $f$  est dérivable sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ , et  $\forall x \neq 0$ :

Dire que  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}^*$  est FAUX!!! La constante peut être différente sur chacun des intervalles  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .  
 Pour s'en convaincre:

- \*  $f(1) = \dots$
- \*  $f(-1) = \dots$

**Remarque 14 : ATTENTION AU CAS STRICT!!!**

Si  $f'(x) > 0, \forall x \in I$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ , mais la RÉCIPROQUE EST FAUSSE!  
*contre-exemple:*  $(x \mapsto x^3)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 7 (admise):** si  $f' \geq 0$  (resp.  $f' \leq 0$ ) sur  $I$  et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors  $f$  est strictement croissante (resp. décroissante) sur  $I$ .

### 3 Dérivées d'ordre supérieur

#### 3.1 Définition

**Définition 6 :**

\* Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Si  $f'$  est à son tour dérivable sur  $I$ , on dit que  $f$  est deux fois dérivable sur  $I$ , et on note  $f^{(2)} = (f')'$  sa dérivée, appelée **dérivée seconde** de  $f$ .

\* Plus généralement: on définit la dérivée  $n$ -ième de  $f$  par récurrence:

- $f^{(0)} = f$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , si  $f$  est  $(n - 1)$ -ième fois dérivable sur  $I$  et si  $f^{(n-1)}$  est dérivable sur  $I$ , alors on note sa dérivée  $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$ , appelée **dérivée  $n$ -ième** de  $f$ .

**Notation 1** La dérivée  $n$ -ième de  $f$  est aussi notée  $\frac{d^n f}{dx^n}$ .

**Remarque 15** L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle  $I$  est noté  $\mathcal{C}^0(I)$  ou  $\mathcal{C}(I)$ , et se lit:  $f \in \mathcal{C}^0(I)$  ssi  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^0$  sur  $I$ .

Si  $f$  est dérivable sur  $I$  alors  $f$  est continue sur  $I$ , mais  $f'$  n'est pas forcément continue sur  $I$ !!

On note alors  $\mathcal{C}^1(I)$  l'ensemble des fonctions dérivables sur  $I$ , de **dérivée continue** sur  $I$ .

$f \in \mathcal{C}^1(I)$  se lit " $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ".

Plus généralement:

**Définition 7** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

(1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{C}^n(I)$  est l'ensemble des fonctions  $n$  fois dérivables sur  $I$ , de **dérivée  $n$ -ième continue** sur  $I$ .  
 (toutes les autres le sont puisqu'elles sont dérivables!)

$f \in \mathcal{C}^n(I)$  se lit " $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ ".

( $\mathcal{C}$  pour continue et  $n$  pour le nombre de fois que  $f$  est dérivable)

(2) On pose:  $\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I)$ , i.e.:  $f \in \mathcal{C}^\infty(I) \iff \forall n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{C}^n(I)$ .

Si  $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ , on dit que  $f$  est indéfiniment dérivable (toutes les dérivées sont continues!) sur  $I$ .

**Remarque 16** Toutes ces définitions se généralisent à des parties qui ne sont pas des intervalles de  $\mathbb{R}$ . Il suffit pour cela de travailler sur chacun des intervalles constituant cet ensemble.

**Remarque 17** Si  $f \in \mathcal{C}^n(I)$  alors  $f$  est  $n$  fois dérivable donc  $f$  est  $(n-1)$  fois dérivable et  $f^{(n-1)}$  est continue (car dérivable). Donc  $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I)$ .

Conclusion:  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{C}^{n-1}(I)}$  (suite décroissante d'ensembles)

Ou encore:

$$\mathcal{C}^\infty(I) \subset \dots \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{C}^{n-1}(I) \subset \dots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I).$$

**Exemple 14 :**

(1) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Considérons la fonction  $f(x) = x^n$  sur  $\mathbb{R}$ :  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

De plus,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Conséquence: Tous les polynômes sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Preuve:**

(2) La fonction exponentielle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\exp^{(n)}(x) = e^x$ . ■

(3) La fonction inverse est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall x \neq 0$ ,  $\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}}$

**Preuve:**

Conséquence:  $\ln \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[)$  et,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall x > 0$ ,  $\boxed{\ln^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}}$  ■

**Preuve:**

(4)  $\cos, \sin \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  et:  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ et } \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

**Preuve:**

## 3.2 Opérations

**Proposition 8 (somme et produit)** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Soient  $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$ .

(1) Pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^n(I)$  et  $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$ .

(2)  $f g \in \mathcal{C}^n(I)$ .

**Preuve:**

**Corollaire 3** Soient  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(I)$ .

$f g \in \mathcal{C}^\infty(I)$  et pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^\infty(I)$ .

**Exemple 15**  $(x \mapsto 2x^4 \sin x - 3e^x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .

**Proposition 9 (composée)** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . Soient  $f \in \mathcal{C}^n(I)$  (resp.  $\mathcal{C}^\infty(I)$ ) et  $g \in \mathcal{C}^n(J)$  (resp.  $\mathcal{C}^\infty(J)$ ), avec  $f(I) \subset J$ .

Alors la composée  $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I)$  (resp.  $\mathcal{C}^\infty(I)$ ).

**Preuve:**

**Exemple 16**  $(x \mapsto e^{\cos x}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .

**Corollaire 4 (quotient)** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

(1) Soit  $f \in \mathcal{C}^n(I)$  (resp.  $\mathcal{C}^\infty(I)$ ), qui ne s'annule pas sur  $I$ . Alors  $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}^n(I)$  (resp.  $\mathcal{C}^\infty(I)$ ).

(2) Soient  $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$  (resp.  $\mathcal{C}^\infty(I)$ ) tel que  $f$  ne s'annule pas sur  $I$ . Alors  $\frac{g}{f} \in \mathcal{C}^n(I)$  (resp.  $\mathcal{C}^\infty(I)$ ).

**Preuve:**

**Exemple 17 :**

(1) Rappel: arctan est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée  $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $\arctan \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ .

Par quotient,  $\arctan' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , donc  $\arctan \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .

(2) Les fractions rationnelles sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur leur ensemble de définition.

(3) En particulier, tan est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**POINT MÉTHODE 3** Comment montrer que  $f \in \mathcal{C}^n(I)$ ?

1. En général, les théorèmes précédents suffisent.

2. S'il y a un problème en un point, revenir à la définition, i.e:

montrer que  $f$  est  $n$  fois dérivable ET que  $f^{(n)}$  est continue (NE PAS OUBLIER!!!)

**Exemple 18** Considérons la fonction  $f(x) = |x|^3$ .

\*  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , mais pour la dérivabilité, il y a un problème en 0...

\*  $f$  est dérivable sur  $] - \infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ , et  $\forall x \neq 0$ :

**Théorème 5 (fonction réciproque)** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}^n(I)$ , dont la dérivée  $f'$  **ne s'annule pas sur**  $I$ , alors  $f$  est bijective de  $I$  dans l'intervalle  $J = f(I)$  et  $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J)$ .

**Remarque 18**  $f$  étant continue sur  $I$ , donc par le TVI,  $J$  est bien un intervalle; de plus,  $f'$  est continue sur  $I$  (puisque  $n \geq 1$ ) et ne s'annule pas sur  $I$ , donc  $f'$  **est de signe constant sur**  $I$  (utiliser le TVI), donc  $f$  est strictement croissante ou strictement décroissante sur  $I$ .

Conclusion:  $f$  est bien bijective de  $I$  dans l'intervalle image  $J = f(I)$ . D'après un résultat précédent,  $f^{-1}$  est continue et dérivable sur  $J$ .

Le théorème précédent dit plus: une fonction bijective et sa réciproque ont la même classe!!

**Preuve:**

**Exemple 19 :**

- (1) tan et arctan, ln et exp, ...
- (2) La fonction  $(x \mapsto x^n)$  est  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  et sa dérivée s'annule en 0.
  - si  $n$  est impair,  $(x \mapsto \sqrt[n]{x}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$ .
  - si  $n$  est pair,  $(x \mapsto \sqrt[n]{x}) \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[)$ .

■