Fonctions réelles d'une variable réelle – DÉRIVATION

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Fonctions dérivables

1.1 Dérivée en un point

Définition 1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.*
On dit que f **est dérivable en** *x_0 si la limite de $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ quand x tend vers x_0 existe et est finie. Cette limite s'appelle le* **nombre dérivé de** f **en** x_0*, on le note $f'(x_0)$:*

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)}$$

Exemple 1 :
(1) Fonction constante: $f(x) = c\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Alors $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ f'(x_0) = 0$. *En effet:*

(2) Fonction identité sur $\mathbb{R}$: $f(x) = x\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Alors $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ f'(x_0) = 1$. *En effet:*

(3) Fonction carrée: $f(x) = x^2\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Alors $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ f'(x_0) = 2\,x_0$. *En effet:*

(4) Fonction racine: $f(x) = \sqrt{x}\ \forall x \geqslant 0$.
Alors $\forall x_0 > 0,\ f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.
En effet:

Remarque 1 :
(1) L'expression $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est appelée **taux d'accroissement**.
(2) Par le changement de variable $h = x - x_0$, on peut se ramener à une limite en 0: $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Lecture graphique 1 :

Définition 2 *Si f est dérivable en x_0, la droite d'équation $y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$ est la* **tangente** *au graphe de f en x_0.*

Remarque 2 Si $f(x) \geqslant (f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0))$ (resp. $\leqslant$), la courbe est au dessus (resp. en dessous) de sa tangente en x_0.

Exemple 2 Graphe de la fonction racine à l'origine:

On note que la droite d'équation $x = 0$ est tangente au graphe de la fonction racine en 0.

Conclusion:

$$\boxed{\text{Si } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty \text{ alors le graphe de } f \text{ admet une tangente } \textbf{verticale} \text{ en } x_0\text{: } f \textbf{ n'est pas dérivable en } x_0}$$

Remarque 3 Attention:

UNE FONCTION N'EST PAS FORCEMENT DERIVABLE LA OU ELLE EST DEFINIE!!!

Définition 3 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$, x_0 n'étant pas une extrêmité de I.*
On dit que f **est dérivable à droite (resp. à gauche) en** *x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en x_0. On note alors:*

$$\boxed{f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \; \textit{et} \; \boxed{f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Remarque 4 Le chapitre sur les limites entraîne:

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ ssi } f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } x_0 \text{ et } f'_d(x_0) = f'_g(x_0)}$$

Dans ce cas, on a: $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple 3 Fonction valeur absolue en 0.

$$f(x) = |x| = \left| \begin{array}{cl} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$$

Lecture graphique 2 :

Conclusion:

Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ n'existe pas car les limites à gauche et à droite existent et sont finies mais <u>différentes</u>, alors le graphe de f n'a pas de tangente en x_0 c'est-à-dire: le graphe de f a un "pic" en x_0.
(f **n'est pas dérivable en** x_0).

Proposition 1 *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

Preuve:

■

Remarque 5 :
(1) LA RECIPROQUE EST FAUSSE!!
Contre-exemples: fonctions racine et valeur absolue sont continues en 0, mais d'après ce qui précède, elles ne sont pas dérivables en 0
(2) LA CONTRAPOSEE EST VRAIE: si f n'est par continue en x_0 alors elle n'est pas dérivable en x_0.

1.2 Fonction dérivée

Définition 4 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
On dit que f **est dérivable sur** *I si f est dérivable en tout point x_0 de I. On définit alors* **la fonction dérivée de f sur** *I par:*

$$\begin{array}{rcl} f' : I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

On note aussi parfois la fonction f' par: $\dfrac{df}{dx}$.

Remarque 6 f est dérivable sur $[a, b]$ ($a < b$) ssi f est dérivable en tout point de $]a, b[$ et est dérivable à gauche en b et à droite en a.

Exemple 4 La fonction racine est dérivable sur $]0, +\infty[$ (mais continue sur $[0, +\infty[$);
la fonction valeur absolue est dérivable sur $]-\infty, 0[$ ET SUR $]0, +\infty[$ (mais continue sur $\mathbb{R}$);
la fonction carrée est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Remarque 7 ATTENTION À LA RÉDACTION!
On dérive une <u>fonction</u> et non un nombre: $f'(x) \neq f(x)'$!!!!
L'écriture $(x^2)'$ NE SERA PAS ACCEPTÉE dans une copie. Il faut nommer la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ puis calculer $f'(x)$.

Exemple 5 : dérivabilité d'un prolongement par continuité (zoom en un point).
(1) Considérons $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in]0, 2\pi]$.
Par encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0, et par abus de notation, on note $f(0) = 0$.
Donc f est continue sur $[0, 2\pi]$.

ATTENTION!! Cet exemple montre bien que limite du taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et limite de la dérivée $f'(x)$, c'est

pas pareil...
En effet: f' n'a pas de limite en 0^+ puisque $\cos\dfrac{1}{x}$ n'en a pas.
(2) Considérons $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\,|x| \end{array}$.
Montrons que f et f' sont continues sur $\mathbb{R}$.

1. f continue sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

1.3 Opérations

1.3.1 Opérations algébriques

Proposition 2 *Soient f et g deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.*
(1) $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f'+g'$.
(2) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
(3) $f\,g$ est dérivable sur I et $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$.
(4) Si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$.

Preuve: soit $x_0\in I$.

■

Exemple 6 :
(1) Considérons $f(x) = x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
Montrons par récurrence que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = n\,x^{n-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(2) $\boxed{\text{Toute fonction polynômiale est dérivable sur } \mathbb{R}}$
Soit $P(x) = a_0 + a_1\,x + \ldots + a_n\,x^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Alors P est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$), et:

$$P'(x) = a_1 + 2a_2\,x + \ldots + na_n\,x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} ka_k\,x^{k-1} \text{ (dérivation terme à terme)}$$

On remarque que $\boxed{\deg P' = \deg P - 1}$
(3) Considérons la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \neq 0$.
f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ (en tant que quotient dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces deux intervalles), et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $\forall x \neq 0$.
(4) $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ est dérivable sur chaque intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ en tant que:
$*$ quotient de fonctions dérivables: $\tan' = \ldots$.

$*$ produit de fonctions dérivables: $\tan' = \ldots$.
Conclusion: $\boxed{\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)}$

1.3.2 Composée

Proposition 3 *Soient f une fonction dérivable sur I, g dérivable sur J avec $f(I) \subset J$.*
Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$.

Preuve: $\forall x \neq x_0$,

■

Exemple 7 :
(1) Considérons $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$.
Donc $f = h \circ g$ avec $h(x) = x^n$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

(on retrouve donc la même formule que pour x^n, $n \in \mathbb{N}$, ...)

(2) Si f est dérivable sur I alors $\forall n \in \mathbb{N}$, f^n est dérivable sur I et $(f^n)' = n\, f^{n-1}\, f'$.
(3) Si f est dérivable sur I et $f(x) > 0\ \forall x \in I$, alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.
(4) Si f est dérivable sur I alors $\sin f$ et $\cos f$ sont dérivables sur I et $(\sin f)' = f' \cos f$ et $(\cos f)' = -f' \sin f$.

Proposition 4 *Si f est dérivable sur I et f ne s'annule pas sur I, alors $\ln|f|$ est dérivable sur I, et $(\ln|f|)' = \dfrac{f'}{f}$.*

Preuve:

■

Remarque 8 :
(1) ATTENTION! Ce théorème donne une condition SUFFISANTE mais pas une condition NÉCESSAIRE!!
Il est possible de faire des opérations sur des fonctions non dérivables et d'obtenir une fonction dérivable.
contre-exemple: $f(x) = \sqrt{x^4} = x^2$ est dérivable en 0
contre-exemple: $g(x) = (\sqrt{x})^2 = x$ est dérivable en 0
(2) Moyen mémotechnique pour retenir cette formule: $\dfrac{d(g \circ f)}{dx} = \dfrac{dg}{df} \times \dfrac{df}{dx}$.

1.3.3 Fonction réciproque

Rappel 1 (chapitre 20): si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f^{-1} est continue sur l'intervalle image $J = f(I)$.
Donc la continuité "se transmet" de f à f^{-1}, et la dérivation?

Graphiquement, on rappelle que les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice $y = x$. Donc si f a une tangente horizontale en un point (i.e. $f'(a) = 0$) alors f^{-1} aura une tangente verticale en l'image de ce point et ne sera donc pas dérivable...
Conclusion: si f^{-1} est dérivable en a alors $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$ (pas de tangente horizontale pour f!). C'est aussi une condition suffisante:

Théorème 1 *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.*
(donc, d'après le chapitre 20, f réalise une bijection de I dans l'intervalle image $J = f(I)$).
Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$\boxed{(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}$$

Preuve: $\forall y_0 \in J$, montrons que le taux d'acroissement $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ a une limite finie quand y tend vers y_0.

■

Exemple 8 :
(1) • ln est bijective de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, et sa dérivée ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.
Donc la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et:

- Si u est dérivable sur I alors e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u'\,e^u$.
  En particulier, $u(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0$: $u'(x) = \dfrac{\alpha}{x}\,e^{\alpha \ln x} = \alpha\,\dfrac{x^\alpha}{x} = \alpha\,x^{\alpha-1}$.

(2) <u>Fonctions racines nième:</u> $f(x) = \sqrt[n]{x}$ définie sur $\mathbb{R}$ si n est impair, $[0,+\infty[$ si n est pair.

Exemple 9 : Fonction arctan**.**
Tangente est continue et dérivable et strictement croissante sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$, et $\tan'(x) =$. Donc:

$$\boxed{\text{arctan est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}}$$

2 Étude des fonctions dérivables sur un intervalle

2.1 Extrema locaux

Soient f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$.

Définition 5 *On dit que f* **admet un extremum local en** *x_0 s'il existe un voisinage de x_0 sur lequel $f(x_0)$ est soit un maximum soit un minimum:*
$\exists\,\alpha > 0 / \forall x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \cap I$, $\underbrace{f(x) \leqslant f(x_0)}_{max}$ *ou* $\underbrace{f(x) \geqslant f(x_0)}_{min}$.

Remarque 9 si x_0 est une extrémité de I, on remplace "local" par "local à gauche" ou "local à droite".

Proposition 5 *Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$ <u>qui n'est pas une extrémité de I</u>.*
Si f possède un extremum (local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque 10 :
(1) La tangente est donc horizontale en x_0.
Exemple: la fonction carrée en 0:

(2) Toutes les hypothèses sont nécessaires:
  $*$ une fonction non dérivable en x_0 peut présenter un extremum local en x_0: la fonction valeur absolue en 0.

$*$ Si x_0 est une extrêmité, f peut avoir un extremum en x_0 sans que la dérivée soit nulle: $id_{[0,1]}$ en 1.
(3) LA RECIPROQUE EST FAUSSE!!! Si $f'(x_0) = 0$ alors x_0 n'est pas forcément un extremum.
contre-exemple: la fonction cube en 0:

(4) LA CONTRAPOSÉE EST VRAIE: si $f'(x_0) \neq 0$ alors x_0 n'est pas un extremum (local) de f.

Preuve: Supposons que x_0 est un point de minimum local:

■

Proposition 6 *Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$ qui n'est pas une extrêmité de I. Si $f'(x_0) = 0$ et si f' change de signe en x_0, alors f possède un extremum local en x_0.*

Preuve: On suppose que il existe $\alpha > 0$ tel que:

$$f'(x) \geqslant 0 \ \forall x \in]x_0, x_0 + \alpha[\text{ et } f'(x) \leqslant 0 \ \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0[\,.$$

Alors f est croissante sur $]x_0, x_0 + \alpha[$ et décroissante sur $]x_0 - \alpha, x_0[$, donc f a un minimum local en x_0.

■

2.2 Théorème de Rolle

Lecture graphique 3

***Théorème 2* (théorème de Rolle):** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*
Si $f(a) = f(b)$ alors $\exists\, c \in]a,b[/ f'(c) = 0$.

Remarque 11 :
(1) c dépend de a et b et n'est pas forcément unique!
(2) Toutes les hypothèses sont nécessaires:
 $*$ f dérivable sur $]a,b[$: la valeur absolue sur $[-1,1]$.
 $*$ $f(a) = f(b)$: fonction identité sur $[0,1]$.
(3) Le théorème s'étend au cas où $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ en remplaçant $f(a)$ par $\lim\limits_{-\infty} f \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ou $f(b)$ par $\lim\limits_{+\infty} f \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Preuve:

$\blacksquare$

POINT MÉTHODE 1 : montrer qu'une dérivée s'annule sur un intervalle.

Exemple 10 Soit un polynôme P ayant deux racines distinctes a et b $(P(a) = P(b) = 0)$. Alors P' s'annule au moins une fois.

2.3 Théorème des accroissements finis et applications

2.3.1 Théorème (ou TAF)

Lecture graphique 4

***Théorème 3* (théorème des accroissements finis ou TAF):** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Preuve:

$\blacksquare$

2.3.2 Application 1: Obtention d'encadrements

Corollaire 1 **(inégalité des accroissements finis ou IAF):** *Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Si:*

- *f est continue sur $[a, b]$,*
- *f est dérivable sur $]a, b[$,*
- *f' est bornée sur $]a, b[$: il existe deux réels m, M tels que $\forall x \in]a, b[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$,*

alors: $\boxed{m\,(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M\,(b-a)}$

Preuve:

■

Corollaire 2 *Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.*
Si il existe $K > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant K$, alors: $\boxed{\forall a, b \in I,\ |f(b) - f(a)| \leqslant K\,|b-a|}$

Preuve: On utilise le corollaire précédent avec $m = -K$ et $M = K$.

■

POINT MÉTHODE 2 :
(1) **Application aux suites $u_{n+1} = f(u_n)$ (convergence et calcul de la limite): cf TD.**
(2) **Obtention d'encadrements:**

Exemple 11 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ln est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$.
Donc par le TAF, il existe $c_n \in]n, n+1[$ tel que $\ln(n+1) - \ln(n) = \ldots$
Or $c_n \in]n, n+1[$ donc $\dfrac{1}{c_n} \in \ldots\ldots\ldots$ donc

Soit: $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \dfrac{1}{n}}$
donc en sommant:

2.3.3 Application 3: variations des fonctions dérivables

Théorème 4 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*
(1) f est croissante sur I ssi $f' \geqslant 0$ sur I.
(2) f est décroissante sur I ssi $f' \leqslant 0$ sur I.
(3) f est constante sur I ssi $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$.

Remarque 12 Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, ce théorème s'applique: le signe de f' sur $]a, b[$ donne la monotonie de f sur $[a, b]$.

Exemple 12 La fonction racine est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$, $\forall x > 0$.
Donc la fonction racine est (strictement) croissante sur $[0, +\infty[$.

Preuve:
(1)

(2) On reprend (1) avec $-f$.
(3) f est constante donc à la fois croissante et décroissante sur I.

$\blacksquare$

Remarque 13 ATTENTION!!
Il est très important de se trouver sur un INTERVALLE...

Exemple 13 Considérons $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.
f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et $\forall x \neq 0$:

Dire que f est constante sur $\mathbb{R}^*$ est FAUX!!! La constante peut être différente sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
Pour s'en convaincre:
 $*$ $f(1) = \dots$
 $*$ $f(-1) = \dots$

Remarque 14 : ATTENTION AU CAS STRICT!!!
Si $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, alors f est strictement croissante sur I, mais la RÉCIPROQUE EST FAUSSE!
contre-exemple: $(x \mapsto x^3)$ sur $\mathbb{R}$.

***Proposition 7* (admise):** *si $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.*

3 Dérivées d'ordre supérieur

3.1 Définition

***Définition 6* :**
$*$ Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f' est à son tour dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable sur I, et on note $f^{(2)} = (f')'$ sa dérivée, appelée dérivée seconde de f.

$*$ Plus généralement: on définit la dérivée n-ième de f par récurrence:

- $f^{(0)} = f$.
- *$\forall n \in \mathbb{N}^*$, si f est $(n-1)$-ième fois dérivable sur I et si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, alors on note sa dérivée $\boxed{f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'}$, appelée dérivée n-ième de f.*

Notation 1 La dérivée n-ième de f est aussi notée $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Remarque 15 L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I est noté $\mathcal{C}^0(I)$ ou $\mathcal{C}(I)$, et se lit: $f \in \mathcal{C}^0(I)$ ssi f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I.
Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I, mais f' n'est pas forcément continue sur I!!
On note alors $\boxed{\mathcal{C}^1(I)}$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I, de dérivée continue sur I.
$f \in \mathcal{C}^1(I)$ se lit "*f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I*".

Plus généralement:

Définition 7 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*
(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\mathcal{C}^n(I)}$ est l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I, de dérivée n-ième continue sur I. (toutes les autres le sont puisqu'elles sont dérivables!)
$f \in \mathcal{C}^n(I)$ se lit "f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I".
 ($\mathcal{C}$ pour continue et n pour le nombre de fois que f est dérivable)

(2) On pose: $\boxed{\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I)}$, i.e: $f \in \mathcal{C}^\infty(I) \iff \forall n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{C}^n(I)$.
Si $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, on dit que f est indéfiniment dérivable (toutes les dérivées sont continues!) sur I.

Remarque 16 Toutes ces définitions se généralisent à des parties qui ne sont pas des intervalles de $\mathbb{R}$. Il suffit pour cela de travailler sur chacun des intervalles constituant cet ensemble.

Remarque 17 Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ alors f est n fois dérivable donc f est $(n-1)$ fois dérivable et $f^{(n-1)}$ est continue (car dérivable). Donc $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I)$.
Conclusion: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{C}^{n-1}(I)}$ (suite décroissante d'ensembles)
Ou encore:

$$\mathcal{C}^\infty(I) \subset \ldots \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{C}^{n-1}(I) \subset \ldots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I)\,.$$

Exemple 14 :
(1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons la fonction $f(x) = x^n$ sur $\mathbb{R}$: $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)\ldots(n-k+1)\,x^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}\,x^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Conséquence: Tous les polynômes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Preuve:

■

(2) La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)}(x) = e^x$.

(3) La fonction inverse est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \neq 0$, $\boxed{f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}}$

Preuve:

■

Conséquence: $\ln \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[)$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $\boxed{\ln^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{x^n}}$

Preuve:

■

(4) $\cos, \sin \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ et } \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) .$$

Preuve:

■

3.2 Opérations

Proposition 8 **(somme et produit)** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Soient $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$.*
(1) Pour tous λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^n(I)$ et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda\, f^{(n)} + \mu\, g^{(n)}$.

(2) $f\, g \in \mathcal{C}^n(I)$.

Preuve:

■

Corollaire 3 *Soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(I)$.*
$f\, g \in \mathcal{C}^\infty(I)$ et pour tous λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^\infty(I)$.

Exemple 15 $(x \mapsto 2x^4 \sin x - 3\, e^x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

***Proposition 9* (composée)** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $f \in \mathcal{C}^n(I)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I)$) et $g \in \mathcal{C}^n(J)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(J)$), avec $f(I) \subset J$.*
Alors la composée $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I)$).

Preuve:

■

Exemple 16 $(x \mapsto e^{\cos x}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

***Corollaire 4* (quotient)** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*
(1) Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I)$), qui ne s'annule pas sur I. Alors $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{C}^n(I)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I)$).
(2) Soient $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I)$) tel que f ne s'annule pas sur I. Alors $\dfrac{g}{f} \in \mathcal{C}^n(I)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I)$).

Preuve:

■

Exemple 17 :
(1) Rappel: arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ continue sur $\mathbb{R}$, donc $\arctan \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
Par quotient, $\arctan' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, donc $\arctan \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
(2) Les fractions rationnelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.
(3) En particulier, tan est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$.

POINT MÉTHODE 3 Comment montrer que $f \in \mathcal{C}^n(I)$?

1. En général, les théorèmes précédents suffisent.
2. S'il y a un problème en un point, revenir à la définition, i.e:
   montrer que f est n fois dérivable ET que $f^{(n)}$ est continue (NE PAS OUBLIER!!!)

Exemple 18 Considérons la fonction $f(x) = |x|^3$.
$*$ f est continue sur $\mathbb{R}$, mais pour la dérivabilité, il y a un problème en 0...

$*$ f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et $\forall x \neq 0$:

Théorème 5 **(fonction réciproque)** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.*
Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, dont la dérivée $\underline{f'}$ **ne s'annule pas sur** $\underline{I}$*, alors f est bijective de I dans l'intervalle $J = f(I)$ et $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J)$.*

Remarque 18 f étant continue sur I, donc par le TVI, J est bien un intervalle; de plus, f' est continue sur I (puisque $n \geqslant 1$) et ne s'annule pas sur I, donc f' **est de signe constant sur** I (utiliser le TVI), donc f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.
Conclusion: f est bien bijective de I dans l'intervalle image $J = f(I)$. D'après un résultat précédent, f^{-1} est continue et dérivable sur J.
Le théorème précédent dit plus: une fonction bijective et sa réciproque ont la même classe!!

Preuve:

■

Exemple 19 :
(1) tan et arctan, ln et exp, ...
(2) La fonction $(x \mapsto x^n)$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et sa dérivée s'annule en 0.
si n est impair, $(x \mapsto \sqrt[n]{x}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$.
si n est pair, $(x \mapsto \sqrt[n]{x}) \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[)$.