

## Continuité

### I. Continuité / Prolongement par continuité.

**Exercice 1** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer leur ensemble de définition, étudier leur continuité, calculer leurs limites aux bornes de leur ensemble de définition et écrire leur prolongement par continuité éventuel:

1.  $f(x) = \frac{3}{x^3 - 1} - \frac{2}{x^2 - 1}$

3.  $h(x) = \sin(x + 1) \ln |x + 1|$

5.  $v(x) = \frac{1 - \cos(\sqrt{|x|})}{|x|}$

2.  $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x + 1}}$

4.  $u(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$

6.  $w(x) = \frac{x^2}{x - 1} e^{1/x}$

**Exercice 2** Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition:

1.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \\ 0 & \text{si } x \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$

3.  $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x(x^2 - 1)} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \\ 0 & \text{si } x \in \{-1, 0\} \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

2.  $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

4.  $u(x) = \begin{cases} (ax)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ a \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}$ , où  $a \in \mathbb{R}$

### II. Équations fonctionnelles (ou caractérisation séquentielle de la continuité).

**Exercice 3** Déterminer toutes les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  vérifiant:

$$f \text{ est continue en } 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x).$$

On pourra montrer que:  $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$

### III. Théorème des valeurs intermédiaires.

**Exercice 4** Soit  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$  et deux fonctions  $f$  et  $g$  continues sur  $I$  telles que:

$$\forall x \in I, |f(x)| = |g(x)| \neq 0.$$

Montrer que  $f = g$  ou  $f = -g$ .

On pourra considérer la fonction  $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

### IV. Application réciproque. (révisions)

**Exercice 5** On considère la fonction  $f$  définie par:  $f(x) = \sqrt{\tan x}$ .

1. Montrer que  $f$  est bijective de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  sur un intervalle  $J$  à déterminer.
2. Établir le tableau de variations de  $f^{-1}$  sur  $J$ .
3. Déterminer  $f^{-1}$ .

**Exercice 6** On considère la fonction  $f$  définie par:  $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ , noté  $I$ .
2. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $I$  dans un intervalle  $J$  à préciser.

3. Déterminer la réciproque  $f^{-1}$ .

**Exercice 7** Dans cet exercice, on se propose de montrer que "toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  (non vide) de  $\mathbb{R}$  est bijective de  $I$  dans  $f(I)$ " est fautive par l'étude d'un contre-exemple. On considère la fonction  $f$  définie par:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

1. Donner une allure graphique de la courbe représentative de  $f$  sur  $[-1, 1]$ .
2. Vérifier que  $f$  est bijective de  $[-1, 1]$  dans  $[-1, 1]$ .
3. Montrer que  $f$  n'est ni continue, ni monotone sur  $[-1, 1]$ .
4. Conclure.

## V. Théorème de bijection

**Exercice 8** On donne :  $0,69 < \ln 2 < 0,70$ . On considère l'application

$$g : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + \ln x$$

Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution et une seule sur  $]0, +\infty[$ .

On note  $\alpha$  cette solution. Montrer que  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .

**Exercice 9** Soit  $f$  la fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{(1+x)^2}$ .

1. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ . Déterminer la fonction  $u$  telle que:

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{u(x)}{x(1+x)^3}.$$

3. Montrer que la fonction  $u$  s'annule en un unique point, que l'on notera  $\alpha$ .
4. Donner le tableau de variations de  $f$ .

## VI. Suites implicites

**Exercice 10** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et l'équation :

$$(E_n) \quad x + \tan x = n, \text{ d'inconnue } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(E_n)$  possède une unique solution, notée  $x_n$ .
2. Montrer que la suite  $(x_n)$  converge et déterminer sa limite.

**Exercice 11 :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ , et pour tout entier  $n$  l'équation  $(E_n)$  :  $\frac{x^3}{1+x^2} = n$ .

1. Montrer que pour tout  $n \geq 0$ ,  $(E_n)$  possède une unique solution, notée  $x_n$ , sur  $\mathbb{R}$ .
2. Quelle est la monotonie de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ?
3. Montrer que  $\forall n \geq 1, n \leq x_n \leq n+1$ .  
En déduire la limite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 12 :**

1. Justifier que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , l'équation  $e^x + x = n$  possède une unique solution que l'on notera par la suite  $x_n$ .

2. Quelle est la monotonie de la suite  $(x_n)$ ?
3. Démontrer que  $\forall n \geq 1, \ln(n - \ln n) \leq x_n \leq \ln n$ .
4. En déduire la limite de la suite  $(x_n)$  puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{\ln n}$ .  
En déduire un équivalent de  $x_n$ .

**Exercice 13** On considère la fonction  $f$  définie comme suit:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} & \text{si } x \in ]0, 1[ \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $[0, 1[$ .
2. (a) Étudier le signe de  $x + \ln(1 - x)$  sur  $[0, 1[$ .  
(b) En déduire le tableau de variations de  $f$  sur  $]0, 1[$ .
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, il existe un seul réel de  $[0, 1[$ , noté  $u_n$ , tel que  $f(u_n) = n$  ; et donner la valeur de  $u_1$ .  
(b) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

**Exercice 14** On désigne par  $n$  un entier naturel non nul et on note  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = nx - e^{-x}$$

1. Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  admet une solution unique notée  $u_n$ .
2. Calculer  $f_n(0)$  et  $f_n(\frac{1}{n})$  puis justifier que  $0 < u_n < \frac{1}{n}$ .
3. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.
4. Justifier l'égalité  $u_n = \frac{e^{-u_n}}{n}$ , puis déterminer la limite de  $nu_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .  
En déduire un équivalent de  $u_n$ .

**Exercice 15** On considère, pour tout entier  $n$  tel que  $n \geq 1$ , l'application  $\varphi_n : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad \varphi_n(x) = e^{-x} - x^{2n-1}$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, l'équation  $\varphi_n(x) = 0$ , d'inconnue  $x \in ]0; +\infty[$ , admet une solution et une seule, notée  $u_n$ , et que :

$$0 < u_n < 1$$

- (b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi_n(u_{n+1}) < 0$ .  
En déduire que la suite  $u$  est croissante.
2. (a) Montrer, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1 :  $\ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n-1}$ .  
(b) En déduire :  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ .

**Exercice 16 :**

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'équation  $\ln x = x^{-n}$  admet une unique solution  $x_n$ .
2. Montrer que  $(x_n)$  est minorée par 1.
3. Montrer que  $(x_n)$  est décroissante. Que peut-on en déduire?
4. (\*) En raisonnant par l'absurde, montrer que  $(x_n)$  converge vers 1.

**Exercice 17** Pour tout entier  $n \geq 1$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^k$$

1. Pour tout entier  $n \geq 1$ , montrer que l'équation  $f_n(x) = 1$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}_+$ , que l'on note  $u_n$ .
2. Montrer que la suite  $u$  est monotone.
3. En déduire que la suite converge.