Continuité

I. Continuité / Prolongement par continuité.

Exercice 1 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer leur ensemble de définition, étudier leur continuité, calculer leurs limites aux bornes de leur ensemble de définition et écrire leur prolongement par continuité éventuel:

1. $f(x) = \dfrac{3}{x^3-1} - \dfrac{2}{x^2-1}$
2. $g(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$
3. $h(x) = \sin(x+1)\,\ln|x+1|$
4. $u(x) = \sin x\,\sin\dfrac{1}{x}$
5. $v(x) = \dfrac{1-\cos(\sqrt{|x|})}{|x|}$
6. $w(x) = \dfrac{x^2}{x-1}e^{1/x}$

Exercice 2 Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\} \\ 0 & \text{si } x \in \{-1,0,1\} \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2\,e^{-x}}{1-e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x\,(x^2-1)} & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\} \\ 0 & \text{si } x \in \{-1,0\} \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
4. $u(x) = \begin{cases} (a\,x)^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ a\sin\left(\frac{\pi}{2}\,x\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}$, où $a \in \mathbb{R}$

II. Équations fonctionnelles (ou caractérisation séquentielle de la continuité).

Exercice 3 Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant:

$$f \text{ est continue en } 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = f(2x)\,.$$

On pourra montrer que: $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(\frac{x}{2^n})$

III. Théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 4 Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et deux fonctions f et g continues sur I telles que:

$$\forall x \in I\,,\ |f(x)| = |g(x)| \neq 0\,.$$

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

On pourra considérer la fonction $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

IV. Application réciproque. (révisions)

Exercice 5 On considère la fonction f définie par: $f(x) = \sqrt{\tan x}$.

1. Montrer que f est bijective de $[0, \dfrac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J à déterminer.
2. Etablir le tableau de variations de f^{-1} sur J.
3. Déterminer f^{-1}.

Exercice 6 On considère la fonction f définie par: $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, noté I.
2. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J à préciser.
3. Déterminer la réciproque f^{-1}.

Exercice 7 Dans cet exercice, on se propose de montrer que la réciproque de "toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I (non vide) de $\mathbb{R}$ est bijective de I dans $f(I)$" est fausse par l'étude d'un contre-exemple.
On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

1. Donner une allure graphique de la courbe représentative de f sur $[-1,1]$.
2. Vérifier que f est bijective de $[-1,1]$ dans $[-1,1]$.
3. Montrer que f n'est ni continue, ni monotone sur $[-1,1]$.
4. Conclure.

V. Théorème de bijection

Exercice 8 On donne : $0,69 < \ln 2 < 0,70$. On considère l'application

$$g : \left]0,+\infty\right[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + \ln x$$

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule sur $\left]0,+\infty\right[$.
On note α cette solution. Montrer que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

Exercice 9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$. Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.

Exercice 10 Soit f la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{(1+x)^2}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$. Déterminer la fonction u telle que:
$$\forall x > 0\,,\ f'(x) = \frac{u(x)}{x\,(1+x)^3}\,.$$
3. Montrer que la fonction u s'annule en un unique point, que l'on notera α.
4. Donner le tableau de variations de f.

VI. Suites implicites

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}$ et l'équation :

$$(E_n) \quad x + \tan x = n \ \text{, d'inconnue } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (E_n) possède une unique solution, notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 12 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$, et pour tout entier n l'équation (E_n) : $\dfrac{x^3}{1+x^2} = n$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, (E_n) possède une unique solution, notée x_n, sur $\mathbb{R}$.
2. Quelle est la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $n \leqslant x_n \leqslant n+1$.
   En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 13 :

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, l'équation $e^x + x = n$ possède une unique solution que l'on notera par la suite x_n.

2. Quelle est la monotonie de la suite (x_n)?
3. Démontrer que $\forall n \geqslant 1$, $\ln(n - \ln n) \leqslant x_n \leqslant \ln n$.
4. En déduire la limite de la suite (x_n) puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{\ln n}$.
   En déduire un équivalent de x_n.

Exercice 14 On considère la fonction f définie comme suit:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{-x}{(1-x)\ \ln(1-x)} & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, 1[$.
2. (a) Étudier le signe de $x + \ln(1 - x)$ sur $[0, 1[$.
   (b) En déduire le tableau de variations de f sur $]0, 1[$.
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$; et donner la valeur de u_1.
   (b) Montrer que la suite (u_n) converge et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 15 On désigne par n un entier naturel non nul et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = nx - e^{-x}$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une solution unique notée u_n.
2. Calculer $f_n(0)$ et $f_n(\frac{1}{n})$ puis justifier que $0 < u_n < \frac{1}{n}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. Justifier l'égalité $u_n = \dfrac{e^{-u_n}}{n}$, puis déterminer la limite de nu_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 16 On considère, pout tout entier n tel que $n \geqslant 1$, l'application $\varphi_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0; +\infty[\,, \quad \varphi_n(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^{2n-1}$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'équation $\varphi_n(x) = 0$,
   d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée u_n, et que :
   $$0 < u_n < 1$$
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n(u_{n+1}) < 0$.
   En déduire que la suite u est croissante.
2. (a) Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $\ln(u_n) = -\dfrac{u_n}{2n-1}$.
   (b) En déduire : $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 17 :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\ln x = x^{-n}$ admet une unique solution x_n.
2. Montrer que (x_n) est minorée par 1.
3. Montrer que (x_n) est décroissante. Que peut-on en déduire?
4. (∗) En raisonnant par l'absurde, montrer que (x_n) converge vers 1.

Exercice 18 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k$$

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, que l'on note u_n.
2. Montrer que la suite u est monotone.
3. En déduire que la suite converge.