Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ – Partie II: par Inégalité des Accroissements Finis

BCPST 1C – Mme MOREL

Soit f une fonction définie, continue et dérivable sur un intervalle I.
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Le but est d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant l'inégalité des accroissements finis.
A noter que tous les résultats énoncés doivent savoir être redémontrés à chaque utilisation.

1 Étude d'un exemple.

On définit la fonction f sur $[-2, +\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par:

$$\forall x \geqslant -2\,,\ f(x) = \sqrt{x+2} \text{ et } \begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

Partie I. Étude de fonction

1. Donner le tableau de variations de f.
2. Etudier la branche infinie de f en $+\infty$ et la tangente au graphe de f en -2.
   En déduire la représentation graphique de f.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0, 2]$.
4. Montrer que $\forall x \in [0, 2]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Partie II. Étude d'une suite récurrente

1. Montrer que pour tout entier n, u_n est bien défini et $u_n \in [0, 2]$.
   (revoir la Partie I)

2. Quelles sont les limites éventuelles de la suite?
   cf 2.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - 2|$.
   cf 3.1

4. En déduire que pour tout entier n, $|u_n - 2| \leqslant 2 \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$.
   cf 3.2

5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   cf 3.3

2 Limites éventuelles de la suite

CAPACITÉ 1 : résolution de l'équation $f(x) = x$ sur I
Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution (ou que f a un unique point fixe) sur I, notée ℓ.
Quel sera le lien entre ℓ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
$\longrightarrow$ RÉDACTION:

POINT METHODE 1 : Comment déterminer ℓ?
Question: la valeur de ℓ est-elle demandée?
$*$ Si OUI: par le calcul direct (on résout l'équation par équivalences).
$*$ Si NON: par le théorème de bijection appliqué à la fonction différence $g(x) = f(x) - x$, sur I.

3 Étude de la convergence de la suite, basée sur l'IAF

But: Montrer que la suite (u_n) converge vers le réel ℓ (rappel: $f(\ell) = \ell$ et $\ell \in I$) obtenu dans la partie précédente.

3.1 Étape 1: Inégalité des Accroissements Finis

Proposition 1 *Si il existe $k \in]0, 1[$ tel que $|f'(x)| \leqslant k$, $\forall x \in I$, alors: $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant k\,|u_n - \ell|$.*

Preuve (À SAVOIR REFAIRE):
On utilise l'inégalité des accroissements finis qui donne: $\forall x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|$.
$\rightarrow$ IDÉE: On veut: $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant k\,|u_n - \ell| \iff |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant k\,|u_n - \ell|$.
Il suffit donc de prendre dans l'IAF: $x = \ldots\ldots$ et $y = \ldots\ldots$. Question: a-t-on le droit?

$\longrightarrow$ RÉDACTION:

■

POINT METHODE 2 : Comment borner f' sur I?
- $*$ Soit par encadrements successifs **JUSTIFIÉS**.
- $*$ Soit par l'étude des variations de f' (en passant par le signe de f'').

Remarque 1 ATTENTION!
Pour pouvoir utiliser l'IAF, il est fondamental d'avoir $u_n \in I$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$
$\rightarrow$ revoir la partie I

3.2 Etape 2: Récurrence

Proposition 2 *Si il existe $k \in]0, 1[$ tel que $|f'(x)| \leqslant k$, $\forall x \in I$, alors: $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant k^n\,|u_0 - \ell|$.*

Preuve (À SAVOIR REFAIRE): par $\boxed{\text{récurrence}}$ sur $n \in \mathbb{N}$:
- $n = 0$:
- supposons le résultat acquis à un certain rang n: $|u_n - \ell| \leqslant k^n\,|u_0 - \ell|$.

Au rang $n + 1$:

Conclusion:

■

Remarque 2 :
(1) Si le premier terme de la suite est u_1, la formule change: $\forall n \geqslant 1$, $|u_n - \ell| \leqslant k^{n-1}\,|u_1 - \ell|$.
Plus généralement: $\forall n \geqslant p$, $|u_n - \ell| \leqslant k^{n-p}\,|u_p - \ell|$.
(2) A retenir: $\boxed{\text{le résultat obtenu par IAF est utilisé dans l'hérédité de la récurrence}}$

3.3 Etape 3: Théorème d'encadrement (calcul de la limite)

CAPACITÉ 2 On passe à la limite dans la proposition 2:
$\lim_{n \to +\infty} k^n = \ldots$ car $\ldots$
Donc, par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ldots$

4 Traitement informatique

Dans ce TD, on démontre donc qu'une suite est convergente sans connaître la valeur (ou la valeur exacte) de la limite, en utilisant *l'inégalité des accroissements finis* qui amène un résultat du type:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ |u_n - \ell| \leqslant g(n)\ ,\ \text{avec} \lim_{n\to+\infty} g(n) = 0$$

Exemple 1 Soit $f(x) = x + \dfrac{1}{4}\,(2 - x^2)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par: $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On montre que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Par encadrement ,(u_n) converge vers ℓ.
Or , $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0,\ \underbrace{\exists\, N \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant N}_{APCR},\ \underbrace{|g(n)| \leqslant \varepsilon}_{-\varepsilon \leqslant g(n) \leqslant \varepsilon}.$

Pour obtenir une valeur approchée de ℓ à ε près (ε donné), on détermine le *plus petit* entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $g(n) \leqslant \varepsilon$. On prend alors la valeur de u_n comme valeur approchée de la limite ℓ à ε près.

Exemple 2 (reprise de l'exemple 1): Écrire un programme qui donne une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près.