Dérivation

I. Domaine de dérivabilité.

Exercice 1 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad g(x) = |x|\sin(x) \quad h(x) = \cos(\sqrt{x})\,.$$

Exercice 2 Étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x\,\sin x}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 3 On pose : $\forall t > 0,\ g(t) = \frac{1}{t}\,e^{-\frac{1}{t}}$.
Montrer que g peut être prolongée par continuité en 0 en une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$.

II. Dérivabilité d'un prolongement par continuité.

Exercice 4 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Soit λ un réel non nul et f définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\lambda\,x)-1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 6 Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} x\,e^{-\frac{3}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
   $$f'(x) = e^{-\frac{3}{|x|}}\left(1 + \frac{3}{|x|}\right).$$
   (b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
   (c) En déduire que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

III. Fonctions réciproques.

Exercice 7 Étudier la fonction: $f(x) = \sin(3\arctan x)$. (ensemble de définition, variations, branches infinies, allure graphique)

Exercice 8 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan x + 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{\pi}{2}$.
On pourra dériver la fonction $f(x) = \arctan x + 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$.

Exercice 9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(\arctan(2x+1))$.

1. Etablir le tableau de variations de f.
2. Résoudre l'équation $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Montrer que f réalise une bijection de $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ dans un intervalle J à préciser.

4. Calculer $(f^{-1})'(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Exercice 10 On considère la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par: $f(x)=x-2+\ln x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
2. Dresser le tableau de variations de f^{-1}, en précisant le comportement aux bornes.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition et que $\forall x\in\mathcal{D}_{f^{-1}}$,
$$(f^{-1})'(x)=\frac{f^{-1}(x)}{1+f^{-1}(x)}\,.$$
4. Déterminer $(f^{-1})'(-1)$.

Exercice 11 Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose:
$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,.$$

1. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera. Que peut-on dire de f^{-1}?
2. Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=1-f(x)^2$. Démontrer que f^{-1} est dérivable sur J et déterminer $(f^{-1})'$.
3. Déterminer explicitement f^{-1} et retrouver $(f^{-1})'$.

Exercice 12 On considère la fonction définie sur $I=\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par :
$$\forall x\in I\,,\ f(x)=\frac{1}{\cos x}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J à préciser. On note f^{-1} sa bijection réciproque.
2. Justifier que $\forall x\in J$,
$$\cos\left(f^{-1}(x)\right)=\frac{1}{x}\quad\text{et}\quad\sin\left(f^{-1}(x)\right)=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J\setminus\{1\}$ et montrer que :
$$\forall x\in\setminus\{1\}\,,\ \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

IV. Encadrements à l'aide du TAF.

Exercice 13 Montrer que: $\forall x>0$, $\dfrac{x}{1+x^2}<\arctan x<x$.

Exercice 14 Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{3}{2}\,x^{2/3}$ et $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite donnée par:
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{1/3}}\,.$$

1. Montrer que pour tout entier $k\geqslant 1$:
$$\frac{1}{(k+1)^{1/3}}\leqslant\frac{3}{2}\left((k+1)^{2/3}-k^{2/3}\right)\leqslant\frac{1}{k^{1/3}}\,.$$
2. En déduire, pour tout entier $n\geqslant 1$, un encadrement de S_n.
3. En déduire un équivalent et la limite de (S_n).

Exercice 15 :

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$,
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}\,.$$
On pose : pour tout entier naturel n non nul,
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}\,.$$
2. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < v_n < \ln(2n) - \ln n\,.$$
En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.

V. Suites récurrentes.

Pensez à vos calculatrices, pour les conjectures...

Exercice 16 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\,,\, u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$$

1. Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Si la suite converge, que vaut sa limite ?
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$
4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{2}{3}\,|u_n - 1|$
5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$
6. Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 17 Soit $f(x) = e^{-x} - \sin x$, pour tout réel $x \in [0,1]$

1. Justifier qu'il existe un et un seul réel $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = 0$.
2. On pose $g(x) = x + \frac{1}{2}\,f(x)$.
   Justifier l'existence de $k < 1$ tel que $0 \leqslant g'(x) \leqslant k$, pour tout $x \in [0,1]$.
   Vérifier que $g([0,1]) \subset [0,1]$.
3. On considère la suite (x_n) définie par: $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.
   (a) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0,1]$.
   (b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer que: $|x_{n+1} - c| \leqslant k\,|x_n - c|$, puis que : $|x_n - c| \leqslant k^n$.
   (c) En déduire que la suite (x_n) converge vers c.
4. Donner un programme python qui donne une valeur approchée de c à 10^{-2} près.

Exercice 18 On pourra utiliser les approximations suivantes à 0,1 près: $e \simeq 2,7$ et $\frac{1}{e} \simeq 0,4$.

I. Etude d'une fonction f.

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par:
$$f(x) = \frac{x - \ln x}{2}\,.$$

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $]0,+\infty[$, notée α.
   (b) Montrer que $\frac{1}{e} \leqslant \alpha \leqslant 1$.
3. (a) Déterminer f'' et préciser le sens de variation de f'.
   (b) En déduire que $\forall x \in [\frac{1}{e}, 1]$: $|f'(x)| \leqslant \frac{e-1}{2}$, puis que $|f'(x)| \leqslant 0,9$.

II. Une suite qui converge vers α.

On définit la suite (u_n) en posant:

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = f(u_n)\,.$$

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n \in [\frac{1}{e}, 1]$.
2. Pour tout entier n, établir:
$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,9\,|u_n - \alpha| \text{ puis que } |u_n - \alpha| \leqslant (0,9)^n\,.$$
3. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).
4. Donner un programme python qui donne une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 19 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par:

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \cos(u_n)\,. \end{cases}$$

1. Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ a une unique solution sur $[0,1]$, notée α.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
3. Pour tout entier n, établir que: $|u_n - \alpha| \leqslant (\sin 1)^n$
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

VI. Dérivées successives.

Exercice 20 On considère les fonctions:

$$f(x) = xe^x \text{ et } g(x) = xe^{2x}\,.$$

Calculer la dérivée $n$ième de f.
Trouver une relation entre les fonctions f et g; en déduire la dérivée $n$ième de g.

Exercice 21 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x$.
Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)\,.$$

Exercice 22 :

1. Établir que $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-2, +\infty[$, et donner l'expression de sa dérivée $n$ième.
2. Même question pour $h : x \mapsto \ln(2+x)$.

Exercice 23 :

1. On pose $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^2-4}$.
   (a) Montrer l'existence de deux réels a et b vérifiant:
   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}\,.$$
   (b) En déduire $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$. Calculer $g^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On montrera qu'il existe des réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $g(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$.