

Dérivation

I. Domaine de dérivabilité.

Exercice 1 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition:

1. $u(x) = x^2 - 2|x|$

3. $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$

5. $h(x) = \cos(\sqrt{x})$

2. $v(x) = \ln(1 + |x|)$

4. $g(x) = \sqrt{x} \sin(x)$

6. $w(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$

Exercice 2 Étudier les fonctions suivantes (ensemble de définition, variations, branches infinies, allure graphique):

1. $f(x) = \sqrt{x \sin x}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

2. $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

Exercice 3 On pose : $\forall t > 0, g(t) = \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}}$.

Montrer que g peut être prolongée par continuité en 0 en une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$.

II. Dérivabilité d'un prolongement par continuité.

Exercice 4 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par:

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} .

Exercice 5 Soit λ un réel non nul et f définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\lambda x) - 1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 6 Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{3}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = e^{-\frac{3}{|x|}} \left(1 + \frac{3}{|x|}\right).$$

(b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

(c) En déduire que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Exercice 7 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par:

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

2. Montrer que f n'est pas deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

III. Fonctions réciproques.

Exercice 8 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan x + 2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{\pi}{2}$.

On pourra dériver la fonction $f(x) = \arctan x + 2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$.

Exercice 9 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos(\arctan(2x+1))$.

1. Etablir le tableau de variations de f .
2. Résoudre l'équation $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Montrer que f réalise une bijection de $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ dans un intervalle J à préciser.
4. Calculer $(f^{-1})'(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Exercice 10 On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \ln x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
2. Dresser le tableau de variations de f^{-1} , en précisant le comportement aux bornes.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition et que $\forall x \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{f^{-1}(x)}{1 + f^{-1}(x)}.$$

4. Déterminer $(f^{-1})'(-1)$.

Exercice 11 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Démontrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera. Que peut-on dire de f^{-1} ?
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - f(x)^2$. Démontrer que f^{-1} est dérivable sur J et déterminer $(f^{-1})'$.
3. Déterminer explicitement f^{-1} et retrouver $(f^{-1})'$.

Exercice 12 On considère la fonction définie sur $I = [0, \frac{\pi}{4}]$ par :

$$\forall x \in I, f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J à préciser. On note f^{-1} sa bijection réciproque.
2. Justifier que $\forall x \in J$,

$$\cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :

$$\forall x \in J \setminus \{1\}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

IV. Suites récurrentes.

Pensez à vos calculatrices, pour les conjectures...

Exercice 13 Soit $f(x) = 1 + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, pour tout réel x non nul.

1. Étudier f sur \mathbb{R}^*
2. Montrer que : $\forall x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right], |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$. On notera α cette solution.
4. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 \neq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
 - (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$.
 - (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9} |u_n - \alpha|$
 - (c) Puis que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_1 - \alpha|$
 - (d) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
 - (e) Donner un programme python qui donne une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 14 Soit $f(x) = e^{-x^2/2}$, pour tout réel x

1. Étudier f sur \mathbb{R} .
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0, 1]$, notée α .
3. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 \in [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
 - (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.
 - (b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1], |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |u_n - \alpha|$
 - (c) Puis que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$
 - (d) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Donner un programme python qui donne une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 15 On pourra utiliser les approximations suivantes à 0, 1 près : $e \simeq 2,7$ et $\frac{1}{e} \simeq 0,4$.

I. Étude d'une fonction f .

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x - \ln x}{2}.$$

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée α .
(b) Montrer que $\frac{1}{e} \leq \alpha \leq 1$.
3. (a) Déterminer f'' et préciser le sens de variation de f' .
(b) En déduire que $\forall x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right] : |f'(x)| \leq \frac{e-1}{2}$, puis que $|f'(x)| \leq 0,9$.

II. Une suite qui converge vers α .

On définit la suite (u_n) en posant:

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que pour tout entier n , $u_n \in [\frac{1}{e}, 1]$.

2. Pour tout entier n , établir:

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,9 |u_n - \alpha| \text{ puis que } |u_n - \alpha| \leq (0,9)^n.$$

3. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .

4. Donner un programme python qui donne une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

VI. Dérivées successives.

Exercice 16 On considère les fonctions:

$$f(x) = xe^x \text{ et } g(x) = xe^{2x}.$$

Calculer la dérivée n ème de f .

Trouver une relation entre les fonctions f et g ; en déduire la dérivée n ème de g .

Exercice 17 On considère la fonction f d'expression : $f(x) = a^x$ ($a > 0$).

Déterminer sa classe et ses dérivées successives sur son ensemble de définition.

Exercice 18 Soit f définie sur \mathbb{R} par: $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x$.

Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right).$$

Exercice 19 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère :

$$f_n(x) = x^n e^{1/x}, \text{ pour tout } x \text{ non nul}$$

Montrer que pour tout entier naturel n , f_n est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{1/x} \text{ pour tout } x \text{ non nul}$$

Exercice 20 :

1. Établir que $f : x \mapsto \frac{1}{2+x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -2, +\infty[$, et donner l'expression de sa dérivée n ème.

2. Même question pour $h : x \mapsto \ln(2+x)$.

Exercice 21 :

1. On pose $f(x) = \frac{3x+2}{x^2-4}$.

(a) Montrer l'existence de deux réels a et b vérifiant:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}.$$

(b) En déduire $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Calculer $g^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On montrera qu'il existe des réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$.