Variables aléatoires réelles finies

BCPST 1C – Mme MOREL

Introduction:
A l'issue d'une expérience aléatoire, on associe une valeur *numérique* au résultat.
Expérience 1. On lance deux dés simultanément et on relève les numéros des faces obtenues. A tout lancer, on peut associer la somme des numéros obtenus. On peut donc définir une application (appelée variable aléatoire): à chaque lancer $\omega \in \Omega$, on associe le réel $X(\omega)$ qui est la somme des numéros obtenus:

$$\begin{array}{rcl} X:\Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

Notant les événements, A_k ="la somme des numéros obtenus est k", on écrit aussi par exemple:

$$A_{10} = \{ \underbrace{\omega \in \Omega}_{\text{lancers pour lesquels}} \quad / \quad \underbrace{X(\omega) = 10}_{\text{la somme des numéros vaut 10}} \} \overset{\text{notation}}{=} (X = 10)\,.$$

Donc $(X = 10) = \{\{4, 6\}, \{5, 5\}\}$ est un événement de Ω (une partie de Ω), dont on peut calculer la probabilité:
Ω est fini (card Ω=21) et il y a équiprobabilité, donc on munit Ω de la probabilité uniforme: $P(X = 10) = \dfrac{2}{21}$.
En fait, $X(\Omega) = [|2, 12|]$, donc $X(\Omega)$ est fini.

1 Variables aléatoires finies

1.1 Définition

Définition 1 *On appelle* **variable aléatoire finie** X *sur un espace probabilisable fini* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *toute application* $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Remarque 1 :
(1) Puisque Ω est fini, $X(\Omega)$ est fini: on dit donc que la v.a X est finie.
(2) $X(\Omega)$ (valeurs prises par X) a en fait plus d'importance que Ω. Parfois même, on saura décrire $X(\Omega)$ explicitement mais pas l'univers Ω!
Pour cela, on a les notations:
 $*$ $(X \in J) = \check{X}(J) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in J\}$.
 $*$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $(X = x) = \check{X}(x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}$, $(X \leqslant x) = \check{X}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leqslant x\}$.

Expérience 1.
La somme des numéros obtenus est inférieure à 4 ssi elle vaut SOIT 2 SOIT 3 SOIT 4, ce qui s'écrit:

$$(X \leqslant 4) = (X = 2) \cup (X = 3) \cup (X = 4)$$

De même: $(3 \leqslant X < 5) = \ldots\ldots$
Remarquons que: $\Omega = (2 \leqslant X \leqslant 12) = (X = 2) \cup (X = 3) \ldots \cup (X = 12)$: événements deux à deux incompatibles.

Proposition 1 *Soit* X *une v.a finie. On note* $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *(*$n \in \mathbb{N}^*$*).*
La famille d'événements de Ω $((X = x_i))_{i \in [|1,n|]}$ *est un système complet d'événements, appelé*
système complet d'événements associé à X .

Preuve:

$\blacksquare$

Expérience 2. Un joueur lance deux fois de suite une pièce de monnaie. A chaque lancer, s'il obtient Pile, il gagne 1 euro et s'il obtient Face, il perd 2 euros.
On note X la v.a égale au gain algébrique du joueur. Alors $X(\Omega) = \{-4, -1, 2\}$, avec:

$$(X = -4) = \{(F, F)\} \quad (X = -1) = \{(P, F), (F, P)\} \quad (X = 2) = \{(P, P)\}\,.$$

1.2 Loi de probabilité

1.2.1 Définition

Définition 2 *Soit X une v.a finie. On appelle* **loi de probabilité de** *X l'application f_X définie par:*

$$f_X : X(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto P(X = x)$$

Remarque 2 Notons $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
Donner la loi de X revient donc à donner les n réels $P(X = x_k)$, $k = 1, \dots, n$.

Exemple 1 Il y a deux façons de représenter la loi d'une v.a finie X:
(1) **Expérience 1.** Représentation de la loi de X sous forme d'un *tableau:* (faire les calculs en exercice)

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$

Moyen d'auto-correction: Puisque les $(X = 1)$, ..., $(X = n)$ forment un système complet d'événements, la somme de leurs probabilités vaut 1: $\displaystyle\sum_{i=1}^{12} P(X = i) = 1$. Donc $\boxed{\text{les nombres de la seconde ligne sont de somme 1}}$
(2) **Expérience 2.** Représentation de la loi de X par un *histogramme:* diagramme en bâtonnets, où le bâtonnet d'abscisse x_k est de hauteur $P(X = x_k)$.
On a $P(X = -4) = \dfrac{1}{4}$, $P(X = -1) = \dfrac{1}{2}$ et $P(X = 2) = \dfrac{1}{4}$, d'où l'histogramme:

Moyen d'auto-correction: $\boxed{\text{la somme des hauteurs des bâtonnets vaut 1}}$

Remarque 3 On a donc $P(X = x_k) \geqslant 0$ et $\sum P(X = x_k) = 1$, ou autrement dit: $\forall x \in X(\Omega)$, $f_X(x) \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f_X(x) = 1$. C'est aussi une CNS:

Théorème 1 *Soit $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ une partie finie de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$.*
f est une loi de probabilité ssi $\forall x \in A$, $f(x) \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{x \in A} f(x) = 1$.

Preuve:
$\boxed{\Rightarrow}$

$\boxed{\Leftarrow}$ ADMIS.

$\blacksquare$

Expérience 3. On donne le tableau suivant:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	a	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Déterminer le réel a tel que f définisse une loi de probabilité.

POINT MÉTHODE 1 :
$\sum\limits_{x \in A} P(X=x) = 1$ donne l'équation pour trouver a et $f(x) \geqslant 0$ son ensemble de résolution.

Remarque 4 Si deux v.a réelles finies définies sur un même espace probabilisé ont même loi, elles ne sont pas forcément égales!
Contre-exemple: On lance une pièce équilibrée, et on note X le nombre de Pile et Y le nombre de Face.

1.2.2 Loi d'une composée

Remarque 5 X étant une v.a, c'est une application de Ω dans $\mathbb{R}$, donc si g est une fonction de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, l'application composée

$$g \circ X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & g \circ X(\omega) = g(X(\omega)) \end{array}$$

est une v.a . La v. a $g \circ X$ est notée $\boxed{g(X)}$

POINT MÉTHODE 2 : comment obtenir la loi de $g(X)$ à partir de celle de X?
1. On commence par l'image $Y(\Omega)$, où $Y = g(X)$.

Notons $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ alors on calcule $g(x_1), \ldots, g(x_n)$.
Attention! Certaines valeurs peuvent être égales!!
Expérience 3. On cherche la loi de $Y = X^2$. ($g(x) = x^2$)
Puisque $X(\Omega) =$, $Y(\Omega) =$. (on a $g(-1) = 1 = g(1)$...)

2. Pour tout $y \in Y(\Omega)$, on calcule $P(Y = y)$ par:

$$P(Y=y) = P(g(X)=y) = \sum_{x_k \in X(\Omega)/g(x_k)=y} P(X = x_k)\,.$$

Preuve:

Expérience 3.

Expérience 2. On cherche la loi de $Y = X^2 + 2X$:

1.2.3 Fonction de répartition

Définition 3 *Soit X une v. a finie. L'application:*

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & P(X \leqslant x) \end{array}$$

est appelée **fonction de répartition de** X

Remarque 6 $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \in [0,1]$. (c'est une probabilité!)

Expérience 3. On rappelle la loi de $X^2 = Y$:

$Y(\Omega)$	0	1	4
$P(Y = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Expérience 2. De la même manière:

Lecture graphique 1 Donnons l'allure graphique de F_X dans les deux expériences précédentes:

A retenir! $\boxed{F_X \text{ est une fonction croissante en escalier, qui part de 0 et arrive en 1}}$

Remarque 7 Si on connaît la loi de X, on peut calculer F_X: notant $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ F_X(x) = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < x_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{k} f_X(x_i) & \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}[\\ 1 & \text{si } x \geqslant x_n \end{array} \right.$$

Preuve:

■

La réciproque est vraie! On peut déterminer la loi d'une v. a à partir de sa fonction de répartition:

Théorème 2 *Soit X une v.a finie. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Alors:*
$\boxed{f_X(x_1) = F_X(x_1) \text{ et } \forall k \in [|2, n|],\ f_X(x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})}$

Preuve:

■

Remarque 8 :
(1) On peut aussi écrire $P(X \leqslant x_{k-1}) = P(X < x_k)$, donc on a aussi: $f_X(x_k) = P(X < x_{k+1}) - P(X < x_k)$.
On a aussi: $P(X = x_k) = 1 - P(X > x_k) - (1 - P(X > x_{k-1}))$, donc:

$$f_X(x_k) = P(X = x_k) = P(X > x_{k-1}) - P(X > x_k).$$

(2) Plus généralement: $\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } a < b,\ P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)}$
car $(X \leqslant b) = (X \leqslant a) \cup (a < X \leqslant b)$, événements incompatibles.
(3) On utilise cette formule quand les probabilités $P(X \leqslant x_k)$ (ou $P(X > x_k) = 1 - P(X \leqslant x_k)$) sont plus simples à calculer que les probabilités $P(X = x_k)$.
$\rightarrow$ voir les exercices où X désigne le min ou le max de variables aléatoires...

1.3 Variables aléatoires indépendantes

Intuitivement, dire que deux v.a X et Y sont indépendantes, c'est dire que toute information de l'une n'influence pas la loi de l'autre:

Définition 4 *Soient deux v.a finies X et Y sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.*
On dit que X et Y sont **indépendantes** *lorsque $\forall x \in X(\Omega)$, $\forall y \in Y(\Omega)$,*

$$P\left((X = x) \cap (Y = y)\right) = P(X = x)\, P(Y = y)\,.$$

Exemple 2 *La notion de v.a indépendantes est conséquence du modèle d'expérience aléatoire choisi...*
On lance deux dés successivement et on pose X (resp. Y) la v.a égale au résultat du premier (resp. deuxième) dé.
Les lancers étant indépendants, on a l'intuition que X et Y aussi, vérifions le:

Proposition 2 *Soient deux v.a finies X et Y sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.*
X et Y sont indépendantes ssi pour tout $A \subset X(\Omega)$, pour tout $B \subset Y(\Omega)$,

$$P\left((X \in A) \cap (Y \in B)\right) = P(X \in A)\, P(Y \in B)\,.$$

Preuve:

■

Corollaire 1 *Si X et Y sont indépendantes, alors $\forall x, y \in \mathbb{R}$,*

$$P\left((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)\right) = F_X(x)\, F_Y(y)\,.$$

Preuve: Il suffit de prendre $A =]-\infty, x]$ et $B =]-\infty, y]$ dans la proposition précédente.

■

Proposition 3 **(ADMISE):** *Soient deux v.a finies X et Y sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.*
Si X et Y sont indépendantes alors pour toute application $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

2 Moments d'une variable aléatoire finie

2.1 Espérance (moment d'ordre 1)

2.1.1 Définition et propriétés

Définition 5 *Soit X une v.a finie. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $n \geqslant 1$.*
On appelle **espérance** *de X (ou* **moyenne** *de X), le réel noté $E(X)$ défini par:*

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, P(X = x_k) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X = x)}$$

Une v.a d'espérance nulle est dite **centrée**.

Remarque 9 :
(1) Si X est la v.a certaine réelle égale à x, i.e $X(\Omega) = \{x\}$, et donc $P(X = x) = 1$. Alors $E(X) =$, donc:

$$\boxed{E(x) = x,\ x \in \mathbb{R}}$$

(2) L'espérance ne dépend pas directement de la v.a mais de sa loi, donc deux v.a de même loi (mais pas forcément égales!) ont même espérance.

Expérience 1. On rappelle la loi de X:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$

Expérience 2. On rappelle la loi de X:

x_i	-4	-1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Proposition 4 *Soient X et Y deux v.a finies.*
(1) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $E(\lambda X) = \lambda E(X)$.
(2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a \leqslant X \leqslant b$ (i.e $X(\Omega) \subset [a, b]$) alors $a \leqslant E(X) \leqslant b$.
En particulier: si X est positive ($X \geqslant 0$) alors $E(X) \geqslant 0$ (positivité).
(3) Si $X \geqslant 0$ et $E(X) = 0$ alors $P(X = 0) = 1$ (X est nulle presque-sûrement).
(4) Si $X \leqslant Y$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$. (croissante)

Remarque 10 (1) est équivalente à: $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)}$
On dit que l'espérance est **linéaire**.

Preuve:
(1) ADMIS.
(2)

(3)

(4)

$\blacksquare$

Remarque 11 La v.a $X = X - E(X)$ est centrée.
Preuve:

$\blacksquare$

2.1.2 Espérance d'une composée

Soit X une v.a finie et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application.

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 : comment calculer $E(g(X))$?
Question: connaît-on la loi de $g(X)$?
$*$ Si OUI: par la définition de l'espérance:

$$E(g(X)) = \sum_{y \in g(X)(\Omega)} y\, P(g(X) = y)\,.$$

$*$ Si NON: par la **formule du transfert:**

Proposition 5 **(ADMISE):** *Soit X une v.a finie et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application.*
On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors:

$$\boxed{E(g(X)) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\, P(X = x_k) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\, P(X = x)}$$

Expérience 2. Calculons $E(X^2 + 2X)$ de deux façons différentes:
$*$ Avec la loi de $Y = X^2 + 2X$. On rappelle la loi de Y:

$Y(\Omega)$	-1	8
$P(Y = y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Donc $E(Y) = \dots$
$*$ Sans la loi de Y. On rappelle la loi de X:

$X(\Omega)$	-4	-1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Donc $E(Y) = \dots$

Exemple 3 : Moments d'ordre r, $r \in \mathbb{N}^*$

Définition 6 *Soit X une v.a finie. On appelle* **moment d'ordre r, $r \in \mathbb{N}^*$, de** *X le nombre réel noté $m_r(X)$ et donné par:* $\boxed{m_r(X) = E(X^r)}$

Remarque 12 L'espérance est le moment d'ordre 1 de X.

CAPACITÉ EXIGIBLE 2 : comment calculer $m_r(X)$?
Par la formule du transfert: $\boxed{m_r(X) = E(X^r) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r\, P(X = x)}$

Exemple 4 Pour tous réels a, b, $\boxed{E(aX + b) = aE(X) + b}$
En effet, par la formule du transfert:

2.2 Variance et écart-type (moments d'ordre 2)

Définition 7 *Soit X une v.a finie.*
(1) On appelle **variance** *de X le réel noté $V(X)$ et défini par:* $\boxed{V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)}$
(2) On appelle **écart-type** *de X le réel noté $\sigma(X)$ défini par:* $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$
Une v.a dont la variance (ou l'écart-type) vaut 1 est dite **réduite**.

Remarque 13 :
(1) L'écart-type est bien défini: par positivité, $\boxed{V(X) \geqslant 0}$
C'est un moyen d'auto-correction!!
(2) $V(X)$ et donc $\sigma(X)$ ne dépendent que de la loi de X, donc deux v.a qui ont même loi ont même variance et même écart-type.
(3) *Interprétation:* $\sigma(X)$ mesure la dispersion de X autour de sa moyenne $E(X)$: Nicolas et Axelle ont eu deux notes de maths ce trimestre, mais très différentes. Nicolas a eu deux fois 10 et Axelle un 0 et un 20. Leur moyenne est donc la même, mais l'écart-type des notes de Nicolas et nul (ce qui exprime sa régularité) tandis que l'écart-type d'Axelle est de 10 (ce qui traduit la forte variabilité de ses résultats).

Exemple 5 Si X est v.a certaine égale à x, alors $V(x) = 0$ et donc $\sigma(x) = 0$.

Dans les exercices, on utilise plutôt:

Proposition 6 **(formule de Koenig-Huygens):** *Soit X une v.a finie. Alors* $\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$

Remarque 14 La variance est la différence entre le moment d'ordre 2 et le moment d'ordre 1 au carré.

Preuve: par la linéarité de l'espérance,

■

CAPACITÉ EXIGIBLE 3 : comment calculer $E(X^2)$?

1. Si on connaît la loi de X^2 (loi d'une composée): par la définition de l'espérance:

$$\boxed{E(X^2) = \sum_{y \in X^2(\Omega)} y\, P(X^2 = y)}$$

2. Si on ne connaît pas la loi de X^2: par le théorème du transfert:

$$\boxed{E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2\, P(X = x)}$$

Expérience 2. On ne connaît pas la loi de X^2, donc on utilise le théorème du transfert:

$X(\Omega)$	-4	-1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Expérience 3. On a calculé la loi de X^2, on peut donc utiliser les deux méthodes:

$*$ Par la définition de l'espérance:

$X^2(\Omega)$	0	1	4
$P(X^2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Donc: $E(X^2) = \dots$

$\to$ Seul problème: il faut être sûr de son calcul pour la loi de X^2!

$*$ Par le théorème du transfert:

$X(\Omega)$	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Donc: $E(X^2) = \dots$

Proposition 7 *Soit X une v.a finie. Alors: pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,*
(1) $V(aX + b) = a^2\, V(X)$ (2) $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

Preuve:

■

Exemple 6 Soit X une v.a finie d'écart-type non nul. Notant $m = E(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$, alors la v.a $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$ est centrée réduite.

Preuve: Par linéarité de l'espérance:

■

***Proposition 8* : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**
Soit X une v.a finie d'espérance m et d'écart-type σ. Alors, pour tout $a > 0$:

$$\boxed{P\left(|X - m| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2}}$$

Remarque 15 Cette inégalité permet d'estimer comment une v.a s'éloigne de sa moyenne: cette probabilité est d'autant plus petite que a est grand (plus on s'éloigne de la moyenne, moins on a de chance de trouver X) et que σ est petit (un écart-type faible signifie que X est "concentrée" autour de sa moyenne).

Preuve:

■

3 Lois usuelles

3.1 Variable certaine

Rappel 1 X est une v.a certaine si elle ne prend qu'une seule valeur, soit $X(\Omega) = \{x\}$ et donc $P(X = x) = 1$.
Alors $\boxed{E(X) = x \text{ et } V(X) = 0}$

3.2 Loi uniforme

Exemple 7 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard de cette urne. Soit X égale au numéro de la boule tirée.
Loi de X:
On dit que X suit la loi uniforme sur $[|1, n|]$.

***Définition 8* :**

(1) Une v.a X suit **une loi uniforme sur** $[|1, n|]$ *($n \in \mathbb{N}^*$) si:*

$$X(\Omega) = [|1, n|] \text{ et } \forall k \in [|1, n|]\,,\ P(X = k) = \frac{1}{n}\,.$$

On note $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([|1, n|])}$
(2) Plus généralement, soient deux entiers a et b tels que $a < b$. On dit que X suit **une loi uniforme sur** $[|a, b|]$ *si:*

$$X(\Omega) = [|a, b|] \text{ et } \forall k \in [|a, b|]\,,\ P(X = k) = \frac{1}{b - a + 1} = \frac{1}{\text{nb de termes}}\,.$$

On note $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([|a, b|])}$

Remarque 16 :
Modélisation
La loi uniforme régit les expériences aléatoires dont toutes les issues sont équiprobables.
Langage Python

Exemple 8 :
(1) On lance un dé et X est la v.a égale au numéro de la face obtenue. Donc $X \hookrightarrow \dots$
(2) Jeu de Pile ou Face et X est la v.a égale à 0 si on obtient Face et à 1 si on obtient Pile. Donc $X \hookrightarrow \dots$

***Proposition 9* :**
(1) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([|1,n|])$ *alors* $\boxed{E(X) = \dfrac{n+1}{2}}$

(2) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([|a,b|])$ *alors* $\boxed{E(X) = \dfrac{a+b}{2}}$

Preuve:
(1)

(2) Notons $n = \text{card}[|a,b|] = b-a+1$. On considère alors la v.a $\boxed{Y = X - a + 1}$
On a $Y(\Omega) = [|1,n|]$ et $\forall k \in [|1,n|]$, $P(Y=k) = \dfrac{1}{n}$, donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{U}([|1,n|])}$
Donc $E(Y) = \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{b-a+1+1}{2} = E(X) - a + 1$ (linéarité de l'espérance), soit $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

■

3.3 Loi de Bernoulli

Exemple 9 Jeu de Pile ou Face où la pièce est truquée: la probabilité d'obtenir Pile est $p \in [0,1]$ et celle d'obtenir Face est $q = 1-p$.
Soit X la v.a qui vaut 1 si on obtient Pile et 0 si on obtient Face.
Loi de X:
On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Définition 9 *Soit $p \in [0,1]$. On dit que X suit une* **loi de Bernoulli de paramètre** p *si:*

$$X(\Omega) = [|0,1|] \text{ et } P(X=1) = p\,,\ P(X=0) = q = 1-p\,.$$

On note $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)}$

Remarque 17 :
Modèle probabiliste (schéma de Bernoulli)
Une v.a de Bernoulli (de paramètre p) modélise le résultat d'une expérience aléatoire à deux issues (succès ou échec), en posant $X = 1$ en cas de succès et $X = 0$ en cas d'échec. (la probabilité du succès vaut p)
Langage Python

Remarque 18 : Fonction de répartition d'une v.a de Bernoulli de paramètre p:

Proposition 10 *Si* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$ *alors* $\boxed{E(X) = p \text{ et } V(X) = p\,q}$

Preuve:

■

Exemple 10 Soit X_S la v.a indicatrice de l'événement S, i.e: $X_S(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$X_S(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3.4 Loi binômiale

Exemple 11 Une urne contient a boules blanches et b boules noires indiscernables au toucher. On tire n boules ($n \in \mathbb{N}^*$) **AVEC remise** de cette urne. On note X le nombre de boules blanches obtenues.
Loi de X: $X(\Omega) =$
On munit Ω de la probabilité uniforme, car ...

$$\forall k \in [|0, n|]\,,\ P(X = k) = \frac{card(X = k)}{\dots}\,.$$

Calcul du card$(X = k)$:
 $*$ placement des k boules blanches: ...... choix.
 $*$ tirage des k boules blanches: ... choix.
 $*$ tirage des $n - k$ boules noires: ... choix.
Donc:

$$P(X = k) = \qquad\qquad = \binom{n}{k} \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}.$$

Posons $p = \dfrac{a}{a+b}$: p est la probabilité de tirer une boule blanche! Et $q = 1 - p = \dfrac{b}{a+b}$ est celle de tirer une boule noire.
Donc: $\forall k \in [|0, n|]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}$.
On dit que X *suit la loi binômiale de paramètres* n, p.

Définition 10 *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in [0, 1]$. *On dit que* X *suit une* **loi binômiale de paramètres** n, p *si:*

$$X(\Omega) = [|0, n|] \text{ et } \forall k \in [|0, n|]\,,\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k\, (1-p)^{n-k}\,.$$

On note $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)}$

Remarque 19 :
(1) Il s'agit bien d'une loi de probabilité. En effet:
 $*$

 $*$
(2) Si $n = 1$: quelle loi usuelle retrouve-t-on?

Remarque 20 :
 Modèle probabiliste
On répète n fois de manière **indépendante** une expérience aléatoire de Bernoulli à deux issues (succès de probabilité p et donc échec de probabilité $q = 1 - p$).
La v.a égale au nombre de succès obtenus suit la loi binômiale de paramètres n, p.

Langage Python

Proposition 11 *Si* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ *alors* $\boxed{E(X) = np \text{ et } V(X) = npq}$

Preuve: On rappelle la formule: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [|1,n|]$.

$*$ Formule du transfert: $E(X^2) = \dots$

Astuce: on écrit $\boxed{k^2 = k(k-1) + k}$ *ce qui revient à calculer:*

$$E(X^2) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, P(X=k)}_{E(X\,(X-1))} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k\, P(X=k)}_{E(X)}\ .$$

Donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = n\,(n-1)\,p^2 + np - n^2p^2 = npq$.

■

Proposition 12 *Si* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ *alors la v.a* $Y = n - X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,q)$*, où* $q = 1-p$.

Preuve: (Y compte le nombre d'échecs!)

$Y(\Omega) = [|0,n|]$ et $\forall k \in [|0,n|]$, $P(Y=k) = P(X=n-k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k}\, q^k = \binom{n}{k} q^k\, p^{n-k}$.

■