Variables aléatoires réelles finies

I. Calcul d'une loi de probabilité.

Exercice 1 :

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}([|1,6|])$. On pose $Y = 2X^2 + 3$. Déterminer l'espérance et la variance de X; l'espérance de Y, et enfin la loi de Y.

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n,p)$ ($n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$). Calculer l'espérance et la variance de $Y = 2^X$. (a-t-on besoin de la loi de Y?)

Exercice 2 On considère un dé cubique truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numéro k soit proportionnelle à k, on note p le coefficient de proportionnalité. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la face du dé obtenue.

1. Déterminer p et donner la loi de X.

2. Donner la fonction de répartition de X.

3. Calculer $E(X)$.

4. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Calculer $E(Y)$.

Exercice 3 Soient $n \geqslant 2$, $a \in \mathbb{R}$ et X une v.a à valeurs dans $[|1,n|]$ telle que, pour tout $k \in [|1,n|]$, $P(X = k) = ak(n-k)$. Déterminer a pour qu'il s'agisse bien d'une loi de probabilité et calculer $E(X)$.

Exercice 4 Un rat de laboratoire est soumis à l'expérience suivante:
il est enfermé dans une cage comportant quatre portes, derrière lesquelles se trouve un morceau de gruyère. Trois des quatre portes sont munies d'un dispositif envoyant au rat une décharge électrique s'il essaye de les franchir; la quatrième laisse le passage libre.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués par le rat jusqu'à ce qu'il trouve la bonne porte.
On suppose que le rat a une bonne mémoire: il élimine les portes où il a eu des échecs. Donner la loi de X et le nombre moyen d'essais effectués par le rat pour arriver au but.

Exercice 5 Une entreprise souhaite recruter un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0,1[$. On pose également $q = 1 - p$.
On définit la variable aléatoire X par :
$X = k$ si le $k$ième candidat réussit le test,
$X = n + 1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X, et vérifier vos calculs (qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité).

2. En dérivant la formule donnant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour $x \neq 1$.

3. En déduire l'espérance de X

II. Lois usuelles à reconnaître.

Exercice 6 Un QCM est composé de n questions. Pour chaque question, il est proposé quatre réponses dont une seule est juste. Répondre correctement à une question rapporte 3 points et répondre faux enlève 1 point.
Un candidat répond au hasard à toutes les questions. On note X le nombre de réponses correctes et S le nombre de points obtenus.

1. Déterminer la loi de X. Donner son espérance et sa variance.

2. Exprimer S en fonction de X. En déduire l'espérance et la variance de S.

Exercice 7 L'examen du code de la route se compose de 40 questions. Pour chaque question, on a le choix entre 4 réponses possibles. Une seule de ces réponses est correcte. Un candidat se présente à l'examen. Il arrive qu'il connaisse la réponse à certaines questions. Il répond alors à coup sûr. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard entre les 4 réponses proposées.
On suppose toutes les questions indépendantes et que pour chacune de ces questions, la probabilité que le candidat connaisse la bonne réponse est p. On note, pour $1 \leqslant i \leqslant 40$, l'événement A_i =“le candidat donne la bonne réponse à la $i$ème question”.
On note S la variable aléatoire égale au nombre total de bonnes réponses.

1. Calculer $P(A_i)$.
2. Déterminer la loi de S.
3. A quelle condition sur p le candidat donnera en moyenne au moins 36 bonnes réponses?

Exercice 8 Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ de gauche à droite. Une puce part de la case numéro 0 et se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Les déplacements successifs de la puce sont indépendants.
Soit X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.

1. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. Soit Y_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts. Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
3. Calculer X_n en fonction de Y_n. En déduire son espérance.

Exercice 9 On dispose d'une pièce et d'un pion placé à l'origine d'un axe gradué. On lance n fois la pièce. A chaque lancer, on déplace le pion d'une unité vers la gauche si on obtient pile, d'une unité vers la droite si on obtient face.
On note X_n l'abscisse du pion à la fin de l'expérience, D_n la distance du pion à l'origine de l'axe et F_n le nombre de fois où la pièce est tombée du côté face.

1. Exprimer D_n en fonction de X_n, et X_n en fonction de F_n.
2. Déterminer la loi de F_n.
3. Calculer l'espérance et la variance de X_n.
4. Comparer la variance de D_n et celle de X_n.
5. Déterminer l'espérance et la variance de D_4.

III. Fonction de répartition et loi d'un min/max.

Exercice 10 On tire avec remise cinq boules d'une urne contenant dix boules numérotées de 1 à 10. On note X la variable aléatoire égale au maximum des cinq numéros obtenus et Y la variable aléatoire égale au minimum des cinq numéros obtenus.

1. Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
2. Calculer $P(X \leqslant k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et $P(Y \geqslant k)$ pour $k \in Y(\Omega)$.
   En déduire les lois de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 11 Soit N un entier supérieur à 10. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire au hasard et simultanément 10 boules de l'urne et on note Y la v. a égale au plus grand nombre tiré.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles?
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Combien y a-t-il de poignées telles que $(Y \leqslant k)$? En déduire $P(Y \leqslant k)$.
4. Déterminer la loi de Y.

Exercice 12 n candidats n'ont pas soigné la présentation de leur copie. Le correcteur, plutôt que de chercher à lire de tels brouillons, décide de noter au hasard et indépendamment les unes des autres les n copies en accordant une égale probabilité à toutes les notes entières possibles de 0 à 20. On note X_n la v.a égale à la meilleure note du groupe.

1. Pour $k \in [\![0, 20]\!]$, calculer $P(X_n \leqslant k)$ et en déduire $P(X_n = k)$. Déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$, interpréter.
2. Montrer que: $E(X_n) = 20 - \displaystyle\sum_{k=0}^{19} \left(\frac{k+1}{21}\right)^n$, et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X_n)$.

IV. Problème de synthèse.

Partie 1 : Étude des puissances d'une matrice

On se donne les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est inversible.
2. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.
3. Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(A^{-1})^n = P\,(D^{-1})^n P^{-1}$.

Partie 2 : Suites d'épreuves aléatoires

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.
On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{ème}$ épreuve $(k \geq 0)$
On note alors U_k la matrice unicolonne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} \mathrm{P}\left[X_k = 0\right] \\ \mathrm{P}\left[X_k = 1\right] \\ \mathrm{P}\left[X_k = 2\right] \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{P}\left[X_k = j\right]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{ème}$ épreuve.
On convient de définir la matrice U_0 par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la loi de X_2. Calculer l'espérance et la variance de X_2
2. Par utilisation de la formule des probabilités totales, prouver que pour tout entier naturel k :
$$U_{k+1} = A^{-1}U_k$$
3. Écrire U_k en fonction de A^{-1} et U_0
4. Pour tout k de $\mathbb{N}$, donner la loi de X_k et vérifier que l'on a :
$$\lim_{k\to+\infty} \mathrm{P}\left[X_k = 0\right] = 1, \quad \lim_{k\to+\infty} \mathrm{P}\left[X_k = 1\right] = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} \mathrm{P}\left[X_k = 2\right] = 0$$

V. Vers les couples de variables aléatoires.

Exercice 13 Soit X une variable aléatoire suivant une loi binômiale de paramètres n et p.
Un compteur affiche les valeurs prises par X de la façon suivante:

- si $X(\omega) \neq 0$, le compteur affiche correctement la valeur $X(\omega)$.
- si $X(\omega) = 0$, le compteur affiche n'importe quoi, au hasard, entre 1 et n.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur. Donner la loi de Y et son espérance.

Exercice 14 Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire "pile" est $p \in]0;1[$ et de $(n+1)$ urnes numérotées de 0 à n.
Pour $k \in [\![0;n]\!]$, l'urne n°k contient k boules vertes et $(n-k)$ boules rouges.

On considère l'expérience $\mathcal{E}$ suivante : on lance n fois la pièce, puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où "pile" a été obtenu.
Par exemple, si on a obtenu quatre "piles" au cours de ces n lancers, on pioche dans l'urne n°4.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de "piles" obtenues lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire une boule verte et 0 sinon.

1. (a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   On précisera en particulier $X(\Omega)$ et $P(X=k)$ pour tout k de $X(\Omega)$.
   Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
   (b) En utilisant la formule de Koenig-Huygens, calculer la valeur de $E(X^2)$.
   (c) Calculer $P_{(X=0)}(Y=0)$ et $P_{(X=n)}(Y=0)$. X et Y sont-elles indépendantes?
   (d) Justifier que, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\quad P_{(X=k)}(Y=1) = \frac{k}{n}$.
   (e) En déduire que :
   $$P(Y=1) = \frac{E(X)}{n}$$
   (f) Donner la loi de Y et son espérance.