Géométrie

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Introduction: Vecteurs et repérages

1.1 Notion de vecteur

Rappel 1 Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par:

- sa direction (celle de la droite (AB))
- son sens (de A vers B)
- sa longueur AB, appelée **norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et notée $\| \overrightarrow{AB} \|$ (cf définition 11)

Remarque 1 :
(1) Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé vecteur nul et noté $\overrightarrow{0}$ (il n'a ni direction, ni sens), et c'est le seul vecteur dont la norme est nulle.
(2) Un vecteur de norme 1 est dit **unitaire** ou normé.

Définition 1 *On dit que deux vecteurs sont* **orthogonaux** *lorsque soit un des deux est nul soit ils ont des directions orthogonales.*

1.2 Famille libre de vecteurs

1.2.1 Vecteurs colinéaires

Définition 2 *Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits* **colinéaires** *si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.*

Proposition 1 *Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (du plan ou de l'espace) sont colinéaires ssi il existe deux réels λ, μ <u>non tous nuls</u> tels que: $\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.*
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **liés**.

Preuve:

■

Définition 3 *Deux vecteurs non liés sont dits* **libres**.
Autrement dit: la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est libre ssi ($\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires) ssi :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0 .$$

Définition 4 *Une <u>base</u> de $\mathbb{R}^2$ (du plan $\mathcal{P}$) est une famille LIBRE de DEUX vecteurs (du plan $\mathcal{P}$).*

1.2.2 Vecteurs coplanaires

Définition 5 *Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace sont* **coplanaires** *si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ou s'il existe deux réels λ, μ tels que $\overrightarrow{w} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$.*

Proposition 2 *Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires ssi il existe trois réels λ, μ, ν non tous nuls tels que $\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} + \nu \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.*

Définition 6 *Trois vecteurs non liés sont dits libres.*
Autrement dit: la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est libre (ssi $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont non coplanaires) ssi:

$$\forall \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} + \nu \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0 .$$

Définition 7 *Une* **base** *de $\mathbb{R}^3$ (de l'espace $\mathcal{E}$) est une famille LIBRE de TROIS vecteurs (de $\mathcal{E}$).*

1.3 Repères du plan et de l'espace

1.3.1 Repères du plan

Proposition 3 *Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base du plan $\mathcal{P}$. Alors, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{P}$, il existe un unique couple (x, y) de réels tels que:*

$$\overrightarrow{u} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} .$$

On dit que (x, y) sont les **coordonnées** *du vecteur $\overrightarrow{u}$* **dans la base** *$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$; et on note $\overrightarrow{u}\,(x, y)$.*

Remarque 2 (preuve de l'unicité):

■

Remarque 3 Un **repère cartésien** du plan $\mathcal{P}$ est un triplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, où l'origine O est un point fixé du plan $\mathcal{P}$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une base de $\mathcal{P}$.
Soit $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

- Les coordonnées d'un point M dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont par définition les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, c'est-à-dire l'unique couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j}$.
  On dit que x est **l'abscisse** de M et y son **ordonnée**; et on note $M\,(x, y)$.
- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathcal{P} \\ M\,(x,y) & \mapsto & \overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} \end{array}$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{P}$.
  On peut donc identifier le point $M\,(x, y)$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}\,(x, y)$
  (les vecteurs apparaissent comme des éléments de $\mathbb{R}^2$)

Proposition 4 *Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$.*
Soient A, B deux points de $\mathcal{P}$ de coordonnées $A\,(x_A, y_A)$ et $B\,(x_B, y_B)$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Preuve: par la relation de Chasles:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} ,$$

avec $\overrightarrow{OA}\,(x_A, y_A)$ donc $-\overrightarrow{OA}\,(-x_A, -y_A)$ et $\overrightarrow{OB}\,(x_B, y_B)$.
Conclusion: $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

■

1.3.2 Repères de l'espace

Proposition 5 *Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de l'espace $\mathcal{E}$. Alors, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{E}$, il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tels que:*

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}\,.$$

On dit que (x, y, z) sont les **coordonnées** *du vecteur $\overrightarrow{u}$* **dans la base** *$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$; et on note $\overrightarrow{u}\,(x, y, z)$.*

Remarque 4 Un **repère cartésien** de l'espace $\mathcal{E}$ est un quadruplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, où l'origine O est un point fixé de l'espace $\mathcal{E}$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base de $\mathcal{E}$.
Soit $\mathcal{E}$ muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

- Les coordonnées d'un point M dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ sont par définition les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, c'est-à-dire l'unique triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$.
  On dit que x est **l'abscisse** de M, y son **ordonnée** et z sa **cote**; et on note $M\,(x, y, z)$.
- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathcal{E} \\ M(x,y,z) & \mapsto & \overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} \end{array}$ est une bijection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathcal{E}$.
  On peut donc identifier le point $M\,(x, y, z)$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}\,(x, y, z)$
  (les vecteurs apparaissent comme des éléments de $\mathbb{R}^3$)

Proposition 6 *Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace $\mathcal{E}$.*
Soient A, B deux points de $\mathcal{P}$ de coordonnées $A\,(x_A, y_A, z_A)$ et $B\,(x_B, y_B, z_B)$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

2 Géométrie du PLAN

Définition 8 *On dit que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une* **base orthonormale** *du plan $\mathcal{P}$ si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une base du plan $\mathcal{P}$ telle que:*

- *$\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux,*
- *$\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont unitaires.*

2.1 Déterminant et colinéarité

Définition 9 *Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormale du plan $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{P}$ de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans cette base.*
On définit le **déterminant de** *$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, noté $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ par:*

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y\,.$$

Remarque 5 Le déterminant de deux vecteurs est un RÉEL et non un vecteur!!!

Remarque 6 Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$, dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ dans la **même** base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Alors: $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \det M$...

Proposition 7 *Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormale du plan $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{P}$.*

$$\boxed{\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires ssi } \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0}$$

Remarque 7 De façon équivalente:

$$\boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \text{ est libre ssi } \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \neq 0}$$

Preuve:
$\boxed{\Rightarrow}$

$\boxed{\Leftarrow}$

■

Exemple 1 Pour quelle(s) valeur(s) de m les vecteurs $\overrightarrow{u}\,(2,-5)$ et $\overrightarrow{v}\,(-6,m)$ sont colinéaires?
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ssi :

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -5 & m \end{vmatrix} = 0 \iff 2m - 30 = 0 \iff m = 15\,.$$

2.2 Produit scalaire et orthogonalité

2.2.1 Produit scalaire: définition

Définition 10 *Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormale du plan $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{P}$ de coordonnées respectives (x,y) et (x',y') dans cette base.*
Le **produit scalaire** *de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, est le RÉEL défini par:*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'\,.$$

Exemple 2 Calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}\,(1,2)$ et $\overrightarrow{v}\,(-3,4)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 1 \times (-3) + 2 \times 4 = 5\,.$$

Remarque 8 Expression matricielle.
Soient $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les matrices colonnes représentant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Alors: $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = {}^tU\,V$.

Preuve: ${}^tU = (x\,y)$ donc ${}^tU\,V = (x\,y)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy' = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\,.$

■

Proposition 8 **(propriétés):**
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ des vecteurs quelconques du plan $\mathcal{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Le produit scalaire est:

1. **bilinéaire:**
$\overrightarrow{u}.(\lambda\,\overrightarrow{u'} + \overrightarrow{v'}) = \lambda\,\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v'}$ et $(\lambda\,\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).\overrightarrow{u'} = \lambda\,\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u'}$
2. **symétrique:** $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{u'}.\overrightarrow{u}$
3. **défini:** $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = 0 \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
4. **positif:** $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} \geqslant 0$.

Preuve: On se place dans un repère orthonormal où les vecteurs ont pour coordonnées:

$$\overrightarrow{u}\,(x,y) \quad \overrightarrow{u'}\,(x',y') \quad \overrightarrow{v}\,(a,b) \quad \overrightarrow{v'}\,(a',b')$$

1.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}.(\lambda\,\overrightarrow{u'} + \overrightarrow{v'}) &= x\,(\lambda x' + a') + y\,(\lambda y' + b') \\ &= \lambda\,(xx' + yy') + (xa' + yb') \\ &= \lambda\,\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v'} \end{aligned}$$

2. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} = xx' + yy' = x'x + y'y = \overrightarrow{u'}.\overrightarrow{u}$
3. $\boxed{\Rightarrow}$ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = 0^2 + 0^2 = 0$
$\boxed{\Leftarrow}$ $x^2 + y^2 = 0$ donc $x^2 = 0$ et $y^2 = 0$ donc $x = 0$ et $y = 0$ donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
4. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = x^2 + y^2 \geqslant 0$.

■

2.2.2 Produit scalaire et norme

Définition 11 *Soit* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *une base orthonormale du plan* $\mathcal{P}$ *et* $\overrightarrow{u}$ *un vecteur de* $\mathcal{P}$ *de coordonnées* (x, y) *dans cette base. On appelle* **norme** *du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *le RÉEL noté* $\| \overrightarrow{u} \|$ *défini par:*

$$\| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{\overrightarrow{u} . \overrightarrow{u}} = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Remarque 9 :
(1) La norme est bien définie car le produit scalaire est positif.
(2) Cette définition coïncide avec la norme d'un vecteur. En effet: $AB = \| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$.

Remarque 10 Expression matricielle:
Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la matrice colonne représentant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Alors: $\| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{{}^tU\,U}$.

Proposition 9 **(propriétés):**
(1) Soit $\overrightarrow{u}$ *un vecteur quelconque du plan* $\mathcal{P}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors:*

1. $\| \lambda \overrightarrow{u} \| = |\lambda| \; \| \overrightarrow{u} \|$.
2. $\| \overrightarrow{u} \| \geqslant 0$.
3. $\| \overrightarrow{u} \| = 0 \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

(2) **Inégalité triangulaire:**
Soient $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs quelconques du plan* $\mathcal{P}$, *alors:*

$$\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \| \leqslant \| \overrightarrow{u} \| + \| \overrightarrow{v} \| .$$

Preuve:
(1)

1.
$$\begin{aligned} \| \lambda \overrightarrow{u} \| &= \sqrt{(\lambda \overrightarrow{u}).(\lambda \overrightarrow{u})} \\ &= \sqrt{\lambda^2 (\overrightarrow{u} . \overrightarrow{u})} \quad \text{(bilinéarité)} \\ &= \sqrt{\lambda^2} \; \| \overrightarrow{u} \| \\ &= |\lambda| \; \| \overrightarrow{u} \| . \end{aligned}$$

2. Une racine est positive.

3.
$$\| \overrightarrow{u} \| = 0 \iff \sqrt{\overrightarrow{u} . \overrightarrow{u}} = 0 \iff \overrightarrow{u} . \overrightarrow{u} = 0 \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} ,$$
puisque le produit scalaire est défini.

(2) En exercice.

■

2.2.3 Produit scalaire et projection orthogonale

Définition 12 *Le projeté orthogonale d'un point* M *sur une droite* $\mathcal{D}$ *du plan est l'intersection de* $\mathcal{D}$ *avec la droite* $\mathcal{D}'$ *orthogonale à* $\mathcal{D}$ *passant par* M.

***Proposition 10* (lien avec le produit scalaire).**
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$. On considère un point A du plan $\mathcal{P}$. Il existe un unique couple de points (B, C) tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$.
On note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB):

Le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ vaut alors:

- *si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.*
- *si les points B et H de la droite (AB) sont du même côté de A alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = AB \times AH$*
- *si les points B et H de la droite (AB) ne sont pas du même côté de A alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -AB \times AH$*

Preuve: On prend le repère orthonormal $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où: $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\| \overrightarrow{AB} \|}$ et $\overrightarrow{j}$ est orthogonal à $\overrightarrow{i}$ tel que sa norme vaut 1.
Dans ce repère:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}\ (x_B, 0) \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}\ (x_C, y_C)\,.$$

<u>De même côté:</u>

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x_B x_C + 0 = AB \times AH\,.$$

<u>Sinon:</u>

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x_B x_C + 0 = AB \times (-AH) = -AB \times AH\,.$$

■

Remarque 11 (expression géométrique) On note $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ l'angle orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ donc on a une bon (base orthonormée) orientée (sens trigo).
Donc : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \pm \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{AH} \| = \| \overrightarrow{u} \|\ x_C$.
Or $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \dfrac{x_C}{\| \overrightarrow{AC} \|}$.
Conclusion: $\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$

2.2.4 Produit scalaire et vecteurs orthogonaux

Proposition 11 *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$. Alors:*

$$\boxed{\overrightarrow{u} \textit{ et } \overrightarrow{v} \textit{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0}$$

Preuve: On choisit l'expression géométrique du produit scalaire:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 &\iff \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 \\
&\iff \| \overrightarrow{u} \| = 0 \text{ ou } \| \overrightarrow{v} \| = 0 \text{ ou } \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 \\
&\iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \text{ ou } (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2}\ (\pi) \\
&\iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux.}
\end{aligned}$$

Or, par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur, ce qui achève la preuve.

■

Proposition 12 *Deux vecteurs non nuls orthogonaux forment une famille libre.*

Preuve:

$\blacksquare$

2.3 Droites et cercles dans le plan

2.3.1 Équations d'une droite

***Proposition 13* (équations paramétriques d'une droite)**
Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère du plan, $M_0\,(x_0, y_0)$ un point du plan et $\overrightarrow{u}\,(\alpha, \beta)$ un vecteur non nul. La droite passant par M_0 et dirigée par $\overrightarrow{u}$ admet la représentation paramétrique:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \alpha t \\ y & = & y_0 + \beta t \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Réciproquement: dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, un tel système d'équations paramétrique représente la droite passant par le point $M_0\,(x_0, y_0)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}\,(\alpha, \beta)$.

Preuve:

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{M_0M} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \exists\, t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{M_0M} = t\,\overrightarrow{u} \text{ car } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \\ &\iff \iff \exists\, t \in \mathbb{R} / (x - x_0, y - y_0) = (t\alpha, t\beta) \\ &\iff \iff \exists\, t \in \mathbb{R} / \left\{\begin{array}{l} x - x_0 = \alpha\, t \\ y - y_0 = \beta\, t \end{array}\right. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Remarque 12 Tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{u}$ est un **vecteur directeur** de la droite.

***Proposition 14* (équations cartésiennes d'une droite)**
Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère du plan.
(1) Toute droite $\mathcal{D}$ admet une équation cartésienne de la forme: $ax + by + c = 0$, où $(a, b) \neq (0, 0)$.
(2) Réciproquement: une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, est celle d'une droite $\mathcal{D}$ du plan de vecteur directeur $(-b, a)$. Si le repère est orthonormal, le vecteur de coordonnées (a, b) est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Remarque 13 $(a, b) \neq (0, 0) \iff a \neq 0$ **ou** $b \neq 0$!!

Remarque 14 On dit que $\overrightarrow{n}$ est normal à $\mathcal{D}$ si $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Preuve:
(1) Soit $M_0\ (x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u}\ (\alpha, \beta)$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} M\ (x, y) \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{M_0M} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires } (\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}) \\ &\iff \det(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{u}) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (x - x_0)\beta - (y - y_0)\alpha = 0 \\ &\iff \beta x + (-\alpha) y + (-\beta x_0 + \alpha y_0) = 0\,. \end{aligned}$$

(2) Soit M_0 un point de $\mathcal{D}$: par exemple, $M_0\left(-\frac{c}{a},0\right)$ (pour $a\neq 0$), alors:

$$\begin{aligned} ax+by+c=0 &\iff a\left(x-(-\frac{c}{a})\right)+b(y-0)=0 \\ &\iff a\,(x-x_0)+b\,(y-y_0)=0\,. \end{aligned}$$

On prend $\overrightarrow{u}\,(-b,a)$ non nul puisque $(a,b)\neq(0,0)$ alors:

$$\begin{aligned} ax+by+c=0 &\iff \det(\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{u})=0 \\ &\iff \overrightarrow{M_0M} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff M\in\mathcal{D} \text{ droite passant par } M_0 \text{ et de vecteur directeur } \overrightarrow{u}, \text{ où } \overrightarrow{u}\,(-b,a)\,. \end{aligned}$$

De plus, $a\,(x-x_0)+b\,(y-y_0)=0 \iff \overrightarrow{M_0M}.\,\overrightarrow{n}=0$, où $\overrightarrow{n}\,(a,b)\neq\overrightarrow{0}$, car $(a,b)\neq(0,0)$.
Donc $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\overrightarrow{n}$.

■

Remarque 15 (équation réduite d'une droite)
Toute droite $\mathcal{D}$ non verticale peut être définie par une équation de la forme:

$$y=px+q$$

p est appelé la **pente** ou le **coefficient directeur** de $\mathcal{D}$, et q l'**ordonnée à l'origine**.

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 : obtenir une équation cartésienne d'une droite.
On distingue trois cas, selon si on connaît:

1. *un point et un vecteur directeur:* la droite $\mathcal{D}$ passe par le point $M_0\,(x_0,y_0)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\,(\alpha,\beta)$.
   Alors une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est de la forme $ax+by+c=0$ avec $\boxed{\alpha=-b \text{ et } \beta=a}$
   On détermine c en introduisant les coordonnées du point M_0 dans l'équation.
2. *un point et un vecteur normal:* la droite $\mathcal{D}$ passe par le point $M_0\,(x_0,y_0)$ et le vecteur $\overrightarrow{n}\,(\alpha,\beta)$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}$.
   Alors une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est de la forme $ax+by+c=0$ avec $\boxed{\alpha=a \text{ et } \beta=b}$
   On détermine c en introduisant les coordonnées du point M_0 dans l'équation.
3. *Deux points $A\,(x_A,y_A)$ et $B\,(x_B,y_B)$:* La droite $\mathcal{D}$ passe par les points $A\,(x_A,y_A)$ et $B\,(x_B,y_B)$.
   A joue le rôle de M_0 et $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite: on est donc ramenés au premier cas.

Exemple 3 :
(1) Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A\,(2,3)$ et $B\,(-4,7)$.
Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est: $\overrightarrow{AB}\,(-6,4)$, donc:

$$\begin{aligned} M\in\mathcal{D} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})=0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x-2 & -6 \\ y-3 & 4 \end{vmatrix}=0 \\ &\iff 4\,(x-2)+6\,(y-3)=0\,. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{D}:\ 4x+6y-26=0}$
(2) Déterminer une équation de la droite passant par $A\,(1,2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(1,-1)$.

$$M\in\mathcal{D} \iff \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u})=0 \iff \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix}=0 \iff -(x-1)-(y-2)=0\,.$$

Donc $\boxed{\mathcal{D}:\ -x-y+3=0}$

2.3.2 Équation d'un cercle

Définition 13 *Soient Ω un point du plan $\mathcal{P}$ et $r > 0$. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M du plan situés à la distance r de Ω:*

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} / \parallel \overrightarrow{\Omega M} \parallel = r\}$$

Proposition 15 *Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal du plan $\mathcal{P}$.*
Le cercle de centre $\Omega\,(x_0, y_0)$ et de rayon r a pour équation cartésienne: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Preuve:

$$\begin{aligned} M\ (x, y) \in \mathcal{C}(\Omega, r) &\iff \parallel \overrightarrow{\Omega M} \parallel = r \\ &\iff \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \\ &\iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \text{ car ....} \end{aligned}$$

■

Exemple 4 Montrer que $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ est l'équation d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Remarque 16 L'équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ s'obtient en écrivant:

$$M \in \mathcal{C} \iff \overrightarrow{MA} \text{ et } \overrightarrow{MB} \text{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0\,.$$

En effet, tout triangle inscriptible dans un cercle dont un côté est le diamètre $[AB]$ est rectangle d'hypothénuse $[AB]$ donc (MA) et (MB) sont orthogonales.
Et la réciproque est vraie: tout triangle rectangle est inscriptible dans un cercle de diamètre son hypothénuse.

2.3.3 Intersection de droites et cercles

Remarque 17 (droites parallèles)
Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ du plan d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles ssi leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Donc:

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ sont parallèles ssi } \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = 0}$$

Remarque 18 (droites orthogonales)
Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ du plan d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont orthogonales ssi leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul (dans un repère orthonormé). Donc:

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ sont orthogonales ssi } aa' + bb' = 0}$$

Dans le plan, l'intersection de deux droites est:

- soit une *droite*: dans ce cas, les deux droites sont confondues.
- soit un *point*: dans ce cas, les deux droites sont sécantes.
- soit *vide*: dans ce cas, les deux droites sont parallèles et distinctes.

CAPACITÉ EXIGIBLE 2 : intersection de deux droites
il suffit de résoudre le système constitué des deux équations cartésiennes (par la méthode du pivot de Gauss??)

Exemple 5 Déterminer l'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ représentées paramétriquement par:

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -t + 5 \end{cases} \quad \text{et } \mathcal{D}' : \begin{cases} x = 3t - 3 \\ y = -t + 4 \end{cases}$$

Équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$:

$*$ $\mathcal{D}$: $M_0\ (-3,5) \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u}\ (2,-1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, donc:

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{M_0M} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ y-5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff -x-3-2y+10=0 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}$: $-x-2y+7=0$.

$*$ De même, $\mathcal{D}'$: $-x-3y+9=0$.

Intersection entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$:

$$M\ (x,y) \in \mathcal{D}\cap\mathcal{D}' \iff \left\{ \begin{array}{ll} -x-2y+7 & =0 \\ -x-3y+9 & =0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} -x-2y+7 & =0 \\ -y & =-2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} x & =-2y+7=3 \\ y & =2 \end{array} \right.$$

Donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en $(3,2)$.

Dans le plan, l'intersection entre une droite $\mathcal{D}$ et un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon r est:

- soit *deux points distincts:* dans ce cas, $d(\Omega,\mathcal{D}) < r$.
- soit *un point unique T:* dans ce cas, $d(\Omega,\mathcal{D}) = r$: on dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont tangents en T.
- soit <u>vide:</u> dans ce cas, $d(\Omega,\mathcal{D}) > r$.

Faites des dessins !!

CAPACITÉ EXIGIBLE 3 : intersection d'une droite et d'un cercle.

On procède par substitution:

$*$ On exprime x en fonction de y (ou y en fonction de x) grâce à l'équation de la droite,

$*$ on reporte cette expression dans l'équation du cercle.

$*$ On obtient une équation du second degré en y (ou en x) dont les solutions sont les ordonnées (ou les abscisses) des points d'intersection entre la droite et le cercle.

$\rightarrow$ il y a 0,1 ou 2 solutions...

Exemple 6 Déterminer les éventuels points d'intersection entre:

$$\mathcal{D} : x+3y-4=0 \text{ et } \mathcal{C} : x^2+y^2+4y-16=0$$

$$M\ (x,y) \in \mathcal{D}\cap\mathcal{C} \iff \left\{ \begin{array}{rl} x+3y-4 & =0 \\ x^2+y^2+4y-16 & =0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} x+3y-4 & =0 \\ (4-3y)^2+y^2+4y-16 & =0 \end{array} \right.$$

Ligne 2:

$$(4-3y)^2+y^2+4y-16=0 \iff 10y^2-20y=0 \iff y\,(y-2)=0 \iff y=0 \text{ ou } y=2\,.$$

Donc:

$$M\ (x,y) \in \mathcal{D}\cap\mathcal{C} \iff \left\{ \begin{array}{ll} x & =4 \\ y & =0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{ll} x & =-2 \\ y & =2 \end{array} \right.$$

Donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ ont deux points d'intersection: $(4,0)$ et $(-2,2)$.

Dans le plan, l'intersection de deux cercles est:

- soit *deux points*
- soit un *unique point* (dit de tangence)
- soit *vide*

Faites des dessins !!

CAPACITÉ EXIGIBLE 4 : intersection de deux cercles
On résout le système en faisant la différence des deux équations (pour se ramener à une équation de droite)

Exemple 7 Déterminer l'intersection entre:

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + 4y - 16 = 0 \text{ et } \mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - x + y - 12 = 0$$

$$M\ (x, y) \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \iff \left\{ \begin{array}{rl} x^2 + y^2 + 4y - 16 & = 0 \\ x^2 + y^2 - x + y - 12 & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rll} x^2 + y^2 + 4y - 16 & = 0 & \\ -x - 3y + 4 & = 0 & L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \end{array} \right.$$

et on est ramenés aux calculs de l'exemple précédent...

3 Géométrie de l'ESPACE

Définition 14 *On dit que* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *est une* **base orthonormale** *de l'espace* $\mathcal{E}$ *si* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *est une base de l'espace* $\mathcal{E}$ *telle que:*

- $\vec{i}$, $\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ *sont orthogonaux deux à deux,*
- $\vec{i}$, $\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ *sont unitaires.*

3.1 Produit scalaire et orthogonalité

Définition 15 *Soit* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *une base orthonormale de l'espace* $\mathcal{E}$ *et* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *deux vecteurs de* $\mathcal{E}$ *de coordonnées respectives* (x, y, z) *et* (x', y', z') *dans cette base.*
Le **produit scalaire** *de* $\vec{u}$ *par* $\vec{v}$, *noté* $\vec{u}.\vec{v}$, *est le RÉEL défini par:*

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz' .$$

Exemple 8 Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}\,(6, -1, 4)$ et $\vec{v}\,(-2, 3, 1)$.

$$\vec{u}.\,\vec{v} = 6 \times (-2) + (-1) \times 3 + 4 \times 1 = -11 .$$

Remarque 19 Expression matricielle.
Soient $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ les matrices colonnes représentant les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Alors: $\vec{u}.\,\vec{v} = {}^tU\,V$.

Proposition 16 **(propriétés):**
Soient $\vec{u}, \vec{u'}, \vec{v}$ *et* $\vec{v'}$ *des vecteurs quelconques de l'espace* $\mathcal{E}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Le produit scalaire est:*

1. **bilinéaire:**
   $\vec{u}.\,(\lambda\,\vec{u'} + \vec{v'}) = \lambda\,\vec{u}.\,\vec{u'} + \vec{u}.\,\vec{v'}$ *et* $(\lambda\,\vec{u} + \vec{v}).\,\vec{u'} = \lambda\,\vec{u}.\,\vec{u'} + \vec{u}.\,\vec{u'}$
2. **symétrique:** $\vec{u}.\,\vec{u'} = \vec{u'}.\,\vec{u}$
3. **défini:** $\vec{u}.\,\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$.
4. **positif:** $\vec{u}.\,\vec{u} \geqslant 0$.

Définition 16 *Soit* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *une base orthonormale de l'espace* $\mathcal{E}$ *et* $\vec{u}$ *un vecteur de* $\mathcal{E}$ *de coordonnées* (x, y, z) *dans cette base.*
On appelle **norme** *du vecteur* $\vec{u}$ *le RÉEL noté* $\| \vec{u} \|$ *défini par:*

$$\| \vec{u} \| = \sqrt{\vec{u}.\,\vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Remarque 20 Cette définition coïncide avec la longueur d'un vecteur. En effet:
$AB = \| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Remarque 21 Expression matricielle:
Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice colonne représentant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Alors:
$\| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{{}^tU\,U}$.

***Proposition 17* (propriétés):**
(1) Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur quelconque de l'espace $\mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors:

1. $\| \lambda \overrightarrow{u} \| = |\lambda| \, \| \overrightarrow{u} \|$.
2. $\| \overrightarrow{u} \| \geqslant 0$.
3. $\| \overrightarrow{u} \| = 0 \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

(2) **Inégalité triangulaire:**
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs quelconques de l'espace $\mathcal{E}$, alors:

$$\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \| \leqslant \| \overrightarrow{u} \| + \| \overrightarrow{v} \| .$$

Remarque 22 (expression géométrique du produit scalaire)
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors: $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

Proposition 18 *Deux vecteurs non nuls orthogonaux forment une famille libre.*

Proposition 19 *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$. Alors:*

$$\boxed{\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0}$$

Exemple 9 Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}\,(1,2,3)$ et $\overrightarrow{v}\,(3,0,-1)$ sont orthogonaux.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 1 \times 3 + 2 \times 0 + (-1) \times 3 = 0 .$$

3.2 Droites et plans dans l'espace

3.2.1 Équations d'une droite

***Proposition 20* (équations paramétriques d'une droite):**
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace, soit $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace et $\overrightarrow{u}\,(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur non nul.
La droite $\mathcal{D}$ passant par le point M_0 et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ admet la représentation paramétrique:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& x_0 + \alpha t \\ y &=& y_0 + \beta t \\ z &=& z_0 + \gamma t \end{array} \right. \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Réciproquement: dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, un tel système d'équations paramétrique représente la droite passant par le point $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}\,(\alpha, \beta, \gamma)$.
Tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite.

Exemple 10 On considère les points $A\,(1,0,2)$ et $B\,(0,-1,3)$ de l'espace $\mathcal{E}$ et le vecteur $\overrightarrow{v}\,(1,1,-1)$.
Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites suivantes:
1. la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.
2. la droite (AB).

1.

$$\begin{aligned} M\ (x,y,z) \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{v} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x - 1 = t \\ y = t \\ z - 2 = t \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{D}\colon \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{array} \right.}$

2. (AB) passe par A et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\,(-1,-1,1) = -\overrightarrow{v}$ donc: $\boxed{(AB)\colon \begin{cases} x = 1-t \\ y = -t \\ z = 2+t \end{cases}}$

3.2.2 Équations d'un plan

Proposition 21 **(équations paramétriques d'un plan):**
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace, soit $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace et $\overrightarrow{u}\,(\alpha, \beta, \gamma)$, $\overrightarrow{v}\,(\alpha', \beta', \gamma')$ deux vecteurs non colinéaires.
Le plan passant par le point M_0 et de base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ admet la représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x &= x_0 + \alpha t + \alpha' t' \\ y &= y_0 + \beta t + \beta' t' \\ z &= z_0 + \gamma t + \gamma' t' \end{cases} \qquad (t, t' \in \mathbb{R})$$

Réciproquement: dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, un tel système d'équations paramétrique représente le plan passant par le point $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ et de base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, où $\overrightarrow{u}\,(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\overrightarrow{v}\,(\alpha', \beta', \gamma')$.

Exemple 11 On considère les points $A\,(1, 0, 2)$, $B\,(0, -1, 3)$ et $C\,(1, 2, 3)$ de l'espace $\mathcal{E}$ et les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{v}\,(1, 1, 1)$ et $\overrightarrow{v'}\,(0, 0, 1)$.
Déterminer un système d'équations paramétriques de chacun des plans suivants:
1. le plan $\mathcal{P}$ défini par le point A et de base $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'})$.
2. le plan (ABC).

1. $M\ (x, y, z) \in \mathcal{P}$ ssi $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont coplanaires:

$$\Longleftrightarrow \exists t, t' \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{v} + t'\,\overrightarrow{v'}$$
$$\Longleftrightarrow \exists t, t' \in \mathbb{R} / \begin{cases} x - 1 = t + 0\,t' \\ y - 0 = t + 0\,t' \\ z - 2 = t + t' \end{cases}$$

Donc $\boxed{\mathcal{P}\colon \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 2+t+t' \end{cases}}$

2. Le plan (ABC) est défini par A et de base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, avec $\overrightarrow{AB}\ (-1, -1, 1)$ et $\overrightarrow{AC}\ (0, 2, 1)$. Donc:

$$M\ (x, y, z) \in (ABC) \Longleftrightarrow \exists t, t' \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB} + t'\,\overrightarrow{AC}$$
$$\Longleftrightarrow \exists t, t' \in \mathbb{R} / \begin{cases} x - 1 = -t + 0\,t' \\ y - 0 = -t + 2\,t' \\ z - 2 = t + t' \end{cases}$$

Donc $\boxed{(ABC)\colon \begin{cases} x = 1-t \\ y = -t+2t' \\ z = 2+t+t' \end{cases}}$

Définition 17 *On dit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est <u>normal</u> au plan $\mathcal{P}$ si $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ et si $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ formant une base de $\mathcal{P}$.*
(Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est alors orthogonal à tout vecteur du plan)

Proposition 22 **(équations cartésiennes d'un plan):**
Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace.
(1) Tout plan $\mathcal{P}$ de l'espace admet une équation cartésienne de la forme: $ax + by + cz + d = 0$, où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
(2) Réciproquement: une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, est celle d'un plan $\mathcal{P}$ de l'espace. Si le repère est orthonormal, le vecteur de coordonnées (a, b, c) est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

CAPACITÉ EXIGIBLE 5 : obtenir une équation cartésienne d'un plan.
On distingue trois cas, selon si on connaît:

1. *un point et un vecteur normal:* le plan $\mathcal{P}$ passe par le point $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ et a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(\alpha, \beta, \gamma)$.
   Alors une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $\boxed{\alpha = a \text{ et } \beta = b \text{ et } \gamma = c}$
   On détermine d en introduisant les coordonnées du point M_0 dans l'équation.

2. *un point et une base:* le plan $\mathcal{P}$ passe par le point $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ et a pour base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
   Alors on détermine un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan $\mathcal{P}$ (par $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v} = 0$). On est donc ramenés au cas précédent.
   Ou bien $\boxed{\text{passage du paramétrique au cartésien}}$

   Exemple 12 (reprise de l'exemple 11)
   Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ défini par le point A et de base $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'})$.

$$\boxed{\text{paramétrique} \to \text{cartésien: compatibilité de système (on élimine } t \text{ et } t')}$$

3. *Trois points A, B, C:* Le plan $\mathcal{P}$ est défini par les points A, B et C.
   A joue le rôle de M_0 et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base du plan: on est donc ramenés au cas précédent.

Exemple 13 Soit le point $A\,(1, 1, 1)$. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ tel que:
1. $\mathcal{P}$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(1, 2, 2)$.
2. $\mathcal{P}$ est le plan passant par A et parallèle au plan d'équation $x - 2y + z = 4$.

1. Une équation de $\mathcal{P}$ est de la forme: $ax + by + cz + d = 0$, avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = 2$, donc $\mathcal{P}$: $x + 2y + 2z + d = 0$.
   Or $A \in \mathcal{P}$ donc $1 + 2 + 2 + d = 0 \iff d = -5$.
   Conclusion: $\boxed{\mathcal{P}\colon\ x + 2y + 2z - 5 = 0}$
2. $\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{P}'$, de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(1, -2, 1)$, donc $\overrightarrow{n}$ est aussi normal à $\mathcal{P}$, donc $\mathcal{P}$: $x - 2y + z + d = 0$.
   Or $A \in \mathcal{P}$ donc $1 - 2 + 1 + d = 0 \iff d = 0$.
   Conclusion: $\boxed{\mathcal{P}\colon\ x - 2y + z = 0}$

3.2.3 Intersection

Remarque 23 : plans orthogonaux.
Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives $ax + by + cz = d$ et $a'x + b'y + c'z = d'$ sont perpendiculaires ssi leurs vecteurs normaux sont orthogonaux:

$$\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{P}' \text{ sont perpendiculaires ssi } aa' + bb' + cc' = 0$$

L'intersection d'un plan et d'une droite est:

- soit un *un point*: dans ce cas, le plan et la droite sont sécants.
- soit une *droite*: dans ce cas, la droite est incluse dans le plan.
- soit *vide*: dans ce cas, la droite est parallèle au plan.

L'intersection de deux plans est:

- soit un *plan*: dans ce cas, les deux plans sont confondus.
- soit une *droite* (système d'équations paramétriques): dans ce cas, les deux plans sont sécants.

Exemple 14 Intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, où:

$$\mathcal{P}\ :\ x + y + 1 = 0 \text{ et } \mathcal{P}'\ :\ y + z + 1 = 0\,.$$

$$M\ (x, y, z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \iff \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = -1 \\ y + z = -1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = -1 - y = t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{(variable qui bouge = paramètre)}$$

Donc $\boxed{\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \text{ est une droite d'équations paramétriques: } \begin{cases} x = -1 - y = t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases} , t \in \mathbb{R}}$

- soit *vide*: dans ce cas, les deux plans sont parallèles et distincts.