Espaces vectoriels

BCPST 1C – Mme MOREL

INTRODUCTION

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit un ensemble E muni de deux lois:

- une application: $E \times E \to E$, notée $+$ (loi de composition interne)
- une application: $\mathbb{K} \times E \to E$, notée $\cdot$ (loi de composition externe)

Nous nous intéressons aux ensembles $(E, +, \cdot)$ qui vérifient les propriétés suivantes:

Loi $+$**:**

$\boxed{\text{A}}$ *Associativité:* $\forall x, y, z \in E$, $x + (y + z) = (x + y) + z$.

$\boxed{\text{N}}$ *élément neutre:* il existe un élément neutre, noté 0_E tq: $\forall x \in E$, $x + 0_E = 0_E + x = x$.

$\boxed{\text{O}}$ *Opposé:* $\forall x \in E$, il existe un réel noté $(-x)$, appelé opposé de x tq: $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$.

$\boxed{\text{C}}$ *Commutativité:* $\forall x, y \in E$, $x + y = y + x$.

Loi $\cdot$**:**

$\boxed{\text{A}}$ *Associativité:* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\, \mu) \cdot x$.

$\boxed{\text{N}}$ *élément neutre:* $\forall x \in E$, $1 \cdot x = x$.

$\boxed{\text{D}}$ *Distributivité:* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$,
$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot y$ et $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.

Depuis le début de l'année, nous avons rencontré beaucoup d'espaces qui, munis de ces deux lois, vérifient ces propriétés, pourriez-vous les citer?

CONCLUSION: Afin d'être le plus général possible, on va parler d'*espace vectoriel.* Un espace vectoriel E est muni des deux lois + et $\cdot$, qui vérifient les propriétés précédentes.
Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés des *vecteurs.* Donc des vecteurs peuvent être des suites, des fonctions, des polynômes, des matrices, des vecteurs du plan ou de l'espace, des variables aléatoires...
Dans ce chapitre, on se limitera aux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$.

1 Structure d'espace vectoriel

1.1 Définition

Définition 1 *Soit un ensemble E muni de deux lois:*

- *une application: $E \times E \to E$, notée + (loi de composition interne)*
- *une application: $\mathbb{K} \times E \to E$, notée $\cdot$ (loi de composition externe)*

$(E, +, \cdot)$ *est un* **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ *(ou un* $\mathbb{K}$ **ev***) si les propriétés suivantes sont vérifiées:*

Loi +:

$\boxed{A}$ *Associativité:* $\forall x, y, z \in E,\ x + (y + z) = (x + y) + z.$

$\boxed{N}$ *élément neutre: il existe un élément neutre, noté 0_E et appelé vecteur nul, tq:*
$\forall x \in E,\ x + 0_E = 0_E + x = x.$

$\boxed{O}$ *Opposé:* $\forall x \in E$, *il existe un réel noté $(-x)$, appelé opposé de x tq:* $x + (-x) = (-x) + x = 0_E.$

$\boxed{C}$ *Commutativité:* $\forall x, y \in E,\ x + y = y + x.$

Loi $\cdot$:

$\boxed{A}$ *Associativité:* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\,\mu) \cdot x.$

$\boxed{N}$ *élément neutre:* $\forall x \in E,\ 1 \cdot x = x.$

$\boxed{D}$ *Distributivité:* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E,$
$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot y$ *et* $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y.$

Les éléments de E sont appelés les **vecteurs** *et ceux de* $\mathbb{K}$ *les* **scalaires***.*

Remarque 1 :
(1) Le vecteur nul appartient toujours à un espace vectoriel, donc un espace vectoriel n'est jamais vide...
(2) Dans un $\mathbb{K}$ev, on ne multiplie pas deux vecteurs entre eux!!

1.2 Règles de calcul

Soit E un $\mathbb{K}$ev.

Proposition 1 **:**
(1) Le vecteur nul est unique.
(2) Tout vecteur de E possède un unique opposé. Donc $-(-x) = x$, $\forall x \in E$.

Preuve:
(1) Supposons qu'il y en a deux : O_E et O'_E, alors :

$$\begin{aligned} O_E + O'_E &= O_E \text{ (car } O'_E \text{ vecteur nul)} \\ &= O'_E \text{ (car } O_E \text{ vecteur nul)} \end{aligned}$$

Donc $O_E = O'_E$.
(2) Supposons que $x \in E$ a deux opposés x_1 et x_2, alors: $x + x_1 = x_1 + x = O_E$ et $x + x_2 = x_2 + x = O_E$. Donc :

$$x_1 \underset{O_E \text{ vect nul}}{=} x_1 + O_E = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = O_E + x_2 = x_2\,.$$

■

Remarque 2 Toutes les règles calculatoires connues en géométrie (vecteurs du plan et de l'espace) restent valables dans un ev quelconque:

Proposition 2 **(admise):**
(1) $\forall x, y, z \in E,\ x + z = y + z \Rightarrow x = y$.
(2) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E$,
  $*\ \lambda \cdot 0_E = 0_E$ *et* $0 \cdot x = 0_E$.
  $*\ \lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0$ *ou* $x = 0_E$.
(3) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ (-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$.
Donc on peut noter $-\lambda \cdot x$ *ou* $-\lambda\, x$ *au lieu de* $-(\lambda \cdot x)$.
Conséquences: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E$,
  $\lambda\, x = \mu\, x \iff \lambda = \mu$ *ou* $x = 0_E$.
  $\lambda\, x = \lambda\, y \iff \lambda = 0$ *ou* $x = y$.

1.3 Espaces vectoriels de référence

Nous avons déjà rencontré sans le dire des espaces vectoriels (cf INTRODUCTION). Ce sont des espaces vectoriels de référence à connaître. Leur structure vectorielle est naturelle et vous n'avez pas à redémontrer que ce sont bien des espaces vectoriels.

2 Sous espaces vectoriels

2.1 Combinaison linéaire de vecteurs

Définition 2 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.*
(1) Pour tout $x, y \in E$, on appelle **combinaison linéaire des vecteurs** x **et** y, *tout vecteur de la forme $\lambda\, x + \mu\, y$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.*
(2) Plus généralement: soient $x_1, \ldots, x_k$ k vecteurs de E.
On appelle **combinaison linéaire de ces k vecteurs**, *tout vecteur de la forme:*

$$\lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 + \ldots + \lambda_k\, x_k,\ \text{où } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}.$$

Exemple 1 :
(1) Combinaisons linéaires du plan $\mathbb{R}^2$:

(2) Complexes:

2.2 Définition

Définition 3 *Soit E un espace vectoriel et* $\boxed{F \subset E}$ *On dit que F est un* **sous espace vectoriel de** E *(ou sev de E) ssi:*
  (1) $O_E \in F$ (le vecteur nul de E est dans F, O_E est donc aussi le vecteur nul de F)
  (2) $\forall x, y \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \lambda\, x + \mu\, y \in F$ (F est stable par combinaison linéaire)

Remarque 3 Si F est un sev de E alors F est un $\mathbb{K}$ev, d'où la méthode:

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 :
pour montrer que E est un ev, on montre que E est un sev d'un ev de référence.

Les questions à se poser: quel est l'ev de référence? Qui sont les vecteurs?

Exemple 2 $\boxed{\textbf{Expression analytique d'un sev}}$
(1) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$

(2) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + y = 0\}$.

Exemple 3 : sev classiques.
(1) Droites vectorielles:

(2) Plans vectoriels:

Proposition 3 *L'intersection d'une famille finie de sev de E est un sev de E*

Remarque 4 ATTENTION!! C'est en général faux pour l'union!

Preuve: Soient $F_1, \ldots, F_n$ n sev de E.

$*$ $\forall i$, F_i est un sev de E donc $O_E \in F_i$ donc $O_E \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i$.

$*$ Soient x, y deux vecteurs de $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$. Soient λ, $\mu \in \mathbb{K}$.

$\forall i$, $x \in F_i$ et $y \in F_i$ et F_i est un ev donc $\lambda\, x + \mu\, y \in F_i$, donc : $\lambda\, x + \mu\, y \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i$.

$*$ Conclusion: $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ est un sev de E.

■

2.3 Sous espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs

Définition 4 *Soient E un $\mathbb{K}$ev et $x_1, \ldots, x_k$ une famille de k vecteurs de E. On dit qu'un vecteur x de E est* **combinaison linéaire des** *$x_1, \ldots, x_k$ s'il existent des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tels que:*

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k\, x_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, x_i\,.$$

On dit que cette écriture est une **décomposition linéaire de** *x* **sur la famille** *$(x_1, \ldots, x_k)$*

Exemple 4 (notions géométriques usuelles) : Soit E un $\mathbb{K}$ev.
(1) On dit que deux vecteurs sont **colinéaires** lorsque l'un est combinaison linéaire de l'autre:
x et y sont dits colinéaires ssi l'un des deux est nul ou il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda\, y$.
(2) Trois vecteurs sont **coplanaires** ssi l'un est combinaison linéaire des deux autres:
x, y et z sont coplanaires ssi deux des trois sont colinéaires ou il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda\, y + \mu\, z$.

Exemple 5 :
(1) $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\right\}$

Remarque 5 Il n'y a pas forcément unicité de la décomposition

Définition 5 *Soit E un espace vectoriel et $(x_1, \ldots, x_k)$ une famille de k vecteurs de E. On note $Vect(x_1, \ldots, x_k)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de ces k vecteurs.*

$$Vect(x_1, \ldots, x_k) = \{x \in E / \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}, x = \lambda_1\, x_1 + \ldots + \lambda_k\, x_k\}$$

Remarque 6 Ou encore: $x \in Vect(x_1, \ldots, x_k)$ ssi x est combinaison linéaire des $x_1, \ldots, x_k$ ssi il existe k scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tels que: $x = \lambda_1\, x_1 + \ldots + \lambda_k\, x_k$.
(décomposition non unique)

Proposition 4 **(admise):** *$Vect(x_1, \ldots, x_k)$ est un sev de E, appelé* **sous espace vectoriel engendré par** $x_1, \ldots, x_k$
On dit aussi que $(x_1, \ldots, x_k)$ engendre $Vect(x_1, \ldots, x_k)$.

Exemple 6 : Soit E un $\mathbb{K}$ev.
(1) Soit x un vecteur non nul de E. $Vect(x) = \{\lambda\, x / \lambda \in \mathbb{K}\}$ (noté aussi $\mathbb{K}\, x$) est un sev de E appelé
droite vectorielle de E dirigée par x
Donc deux vecteurs sont colinéaires ssi ils appartiennent à une même droite vectorielle.
Par exemple: $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{C}) / 2x + y = 0 \right\}$

(2) Soient a, b deux vecteurs non colinéaires de E. $Vect(a, b) = \{\lambda\, a + \mu\, b / \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ est un sev de E appelé
plan vectoriel de E porté par a et b
Donc trois vecteurs sont coplanaires si ils appartiennent à un même plan vectoriel.
Par exemple: $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\right\}$.

Proposition 5 **(admise):** *$Vect(x_1, \ldots, x_k)$ est le plus petit sev de E contenant la famille $(x_1, \ldots, x_k)$.*

Exemple 7 : $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

3 Bases d'un espace vectoriel

3.1 Familles génératrices

Définition 6 *Soit E un espace vectoriel. Une famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_k)$ de E est une* **famille génératrice** *de E si* $\boxed{E = Vect(x_1, \dots, x_k)}$ *c'est-à-dire tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_k$.*

$$\boxed{\forall x \in E\,,\ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}\ tq\ x = \lambda_1\, x_1 + \dots + \lambda_k\, x_k}$$

Remarque 7 : Récapitulatif: lecture (dans les deux sens)

$$\begin{array}{rcl} E & = & Vect(x_1, \dots, x_k) \\ & \leftarrow: & (x_1, \dots x_k)\text{est une famille génératrice / engendre } E \\ & \rightarrow: & \text{tout vecteur de } E \text{ est combinaison linéaire des vecteurs } x_1, \dots x_k \\ & & \text{tout vecteur de } E \text{ se décompose sur la famille } x_1, \dots x_k \end{array}$$

Remarque 8 :
(1) La décomposition de x sur la famille $x_1, \dots, x_k$ n'est pas unique, i.e les λ_i ne sont pas uniques.
exemple: $u_1 = (-1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$ et $u_3 = (1, 0)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Alors,
$(1, 2) =$
$(1, 2) =$
(2) Il n'y a pas unicité de la famille génératrice.
exemple: multiplier par un scalaire non nul transforme une famille génératrice en une nouvelle famille génératrice:
Soit $< x_1, \dots, x_n >$ une famille génératrice de E: $\forall x \in E$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \lambda_1\, x_1 + \dots + \lambda_n\, x_n$.
Soit $\lambda \neq 0$, alors: $x = (\lambda\, \lambda_1)\, \dfrac{1}{\lambda} x_1 + \dots + \lambda_n\, x_n$ (par exemple). Donc $E = Vect < x_1, \dots, x_n >= Vect < \dfrac{1}{\lambda}\, x_1, \dots, x_n >$.

Exemple 8 :
(1) $(1, i)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$ev.
(2) Donnez une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Proposition 6 *Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.*

Preuve:

$\blacksquare$

Proposition 7 **(LEMME DE RÉDUCTION):**
Si $E = Vect(x_1, \ldots, x_k, v)$ *et si* $v \in Vect(x_1, \ldots, x_k)$ *alors* $E = Vect(x_1, \ldots, x_k)$.
En particulier: $Vect(x_1, \ldots, x_k, O_E) = Vect(x_1, \ldots, x_k)$.

Preuve:

$\blacksquare$

CAPACITÉ EXIGIBLE 2 $\boxed{\textbf{expression analytique} \rightarrow \textbf{famille génératrice}}$

Exemple 9 Donner une famille génératrice de $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0 \text{ et } x + y = 0\right\}$.

CAPACITÉ EXIGIBLE 3 :
$\boxed{\textbf{Famille génératrice} \rightarrow \textbf{expression analytique} = \textbf{compatibilité de système linéaire (rang)}}$

Exemple 10 Soient les vecteurs $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. (U_1, U_2) est-elle une famille génératrice de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$? Si non, déterminer $Vect(U_1, U_2)$.

Mêmes questions avec la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.2 Familles libres

Définition 7 *Soit E un espace vectoriel et $(x_1, \ldots, x_k)$ une famille de k vecteurs de E.*
(1) On dit que la famille $(x_1, \ldots, x_k)$ est **libre** *si:*

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\,,\ \lambda_1\, x_1 + \ldots + \lambda_k\, x_k = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$$

Les vecteurs d'une famille libre sont dits **linéairement indépendants***.*
(2) Une famille qui n'est pas libre est dite **liée***:*
il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, dont l'un (au moins) est non nul (non tous nuls) tels que $\lambda_1\, x_1 + \ldots + \lambda_k\, x_k = 0_E$.
Les vecteurs d'une famille liée sont dits **linéairement dépendants***.*

Proposition 8 *Une famille est liée ssi l'un au moins de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.*

Preuve: (*Un coeff non nul $\leftrightarrow$ un vecteur qui s'exprime en fonction des autres*)

$\blacksquare$

Remarque 9 :
Dire que deux vecteurs x_1, x_2 sont colinéaires signifie que la famille (x_1, x_2) est liée.
Dire que trois vecteurs x_1, x_2, x_3 sont coplanaires signifie que la famille (x_1, x_2, x_3) est liée.

CAPACITÉ EXIGIBLE 4 $\boxed{\textbf{LIBERTÉ = RÉSOLUTION d'un système linéaire HOMOGÈNE}}$
En effet: pour toute famille $(x_1, \ldots, x_k)$ d'un ev E, l'équation vectorielle $\lambda_1\, x_1 + \ldots + \lambda_k\, x_k = 0_E$ admet TOUJOURS la

solution $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
Pour une famille *libre*, la solution $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ est la SEULE de l'équation vectorielle $\lambda_1 \, x_1 + \ldots + \lambda_k \, x_k = 0_E$.

Exemple 11 Étudier la liberté de la famille (x_1, x_2, x_3) donnée par: $x_1 = (0,1,2)$, $x_2 = (1,0,2)$ et $x_3 = (1,2,0)$.

Exemple 12 Donner une famille libre de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Remarque 10 :
(1) Inutile de poser un système linéaire pour étudier une famille de deux vecteurs! Il suffit de regarder si les "coordonnées" sont proportionnelles... (vecteurs "colinéaires")
(2) ATTENTION !!! Une famille dont les vecteurs sont deux à deux indépendants n'est pas forcément libre!!!
exemple: $u = (1,0,2)$ et $v = (2,0,4)$...
exemple: $((1,-1,-1),(1,1,1),(3,1,1))$...

***Proposition 9* (admise):**
(1) Toute famille contenant une sous-famille liée est liée.
(2) Soit $(x_1, \ldots, x_k)$ une famille libre d'un ev E et $v \in E$ tel que $v \notin Vect(x_1, \ldots, x_k)$ alors la nouvelle famille $(x_1, \ldots, x_k, v)$ est libre.

3.3 Bases

Définition 8 *Soit E un $\mathbb{K}$ev. Une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de E est une* **base** *de E ssi tout vecteur de E se décompose de façon unique sur les $u_1, \ldots, u_n$:*
$$\forall x \in E\,,\ \exists! \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} / x = \lambda_1 \, u_1 + \ldots + \lambda_n \, u_n\,.$$
Les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont appelés les **coordonnées** *de x dans la base $(u_1, \ldots, u_n)$.*

Proposition 10 *La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E ssi elle est à la fois libre et génératrice de E.*

Preuve:

■

Exemple 13 : $\boxed{\textbf{Bases canoniques}}$

CAPACITÉ EXIGIBLE 5 $\boxed{\textbf{Les coordonnées ne sont pas demandées} \Rightarrow \textbf{famille libre et génératrice}}$

Exemple 14 :
Soient $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 / x + y + 2z = 0\right\}$ et $E = Vect\left((1,0,1),(0,1,0),(2,2,2),(1,-1,1)\right)$.
On sait déjà trouver une famille génératrice de F...

Pour E: on a déjà une famille génératrice, pensez au lemme de réduction!! (sinon, on étudie la liberté de la famille par résolution d'un système linéaire homogène)

CAPACITÉ EXIGIBLE 6 :
$\boxed{\textbf{coordonnées demandées} \Rightarrow \textbf{décomposition unique et résolution de système linéaire}}$

Exemple 15 :
Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$, et donner les coordonnées de tout vecteur dans

cette base.

4 Dimension d'un espace vectoriel

4.1 Définition

***Théorème 1* (admis):** *Si un $\mathbb{K}$ev E admet une base contenant n vecteurs, alors toute autre base de E aura aussi n vecteurs.*
On appelle n (cardinal d'une base) la **dimension** *de E, et on note:* $\boxed{n = \dim E}$
Par convention, $\dim\{O_E\} = 0$.

Remarque 11 ATTENTION!! Ne pas confondre DIMENSION et CARDINAL!!!
La dimension d'une base ne veut rien dire... Mais le cardinal d' $\boxed{\text{une}}$ base donne $\boxed{\text{la}}$ dimension d'un ev.

Exemple 16 :
(1)
$\boxed{\dim \mathbb{R}^n = n,\ \dim \mathbb{C}^n = n \text{ (vu comme un } \mathbb{C}\text{ev)}}$

$\boxed{\dim \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) = n \text{ et } \dim \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) = np}$

(2) Donner la dimension des espaces vectoriels traités dans les exemples 15 et 16.

***Proposition 11* (admise):** *Soit E un ev de dimension p.*

1. *Familles libres:*
   (a) *toute famille libre a au plus p éléments.*
   (b) *une famille libre ayant p éléments est une base.*
   (c) *toute famille ayant (au moins) $p+1$ éléments est liée.*
2. *Familles génératrices:*
   (a) *toute famille génératrice a au moins p éléments.*
   (b) *une famille génératrice ayant p éléments est une base.*
   (c) *toute famille ayant au plus $p-1$ éléments n'est pas génératrice de E.*

CAPACITÉ EXIGIBLE 7 Quand on travaille dans un ev dont $\boxed{\text{la dimension est connue}}$.
Pour prouver qu'une famille de vecteurs est une base (*sans chercher les coordonnées*), il suffit de:

- vérifier qu'elle contient le bon nombre de vecteurs.
- montrer qu'elle est libre OU génératrice.
  En général, il est plus simple de montrer la liberté... Pourquoi?

***Théorème 2* (admis):** *Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension n.*
Soient F et G deux sev de E tels que $F \subset G$, alors: $\dim F \leqslant \dim G$*; et si* $\dim F = \dim G$ *alors* $F = G$.

Remarque 12 Pour montrer que deux sev sont égaux, il suffit de montrer que l'un est inclus dans l'autre et qu'ils ont même dimension.

4.2 Rang d'une famille de vecteurs

4.2.1 Définition

Définition 9 *Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs d'un $\mathbb{K}$ev E de dimension n.*
On appelle **rang de** $(u_1, \dots, u_p)$*, noté* $\boxed{rg(u_1, \dots, u_p)}$ *la dimension du sev engendré par la famille $(u_1, \dots, u_p)$.*
En d'autres termes:

$$\boxed{rg(u_1, \dots, u_p) = \dim Vect(u_1, \dots, u_p)}$$

Le rang permet de caractériser les familles libres et génératrices:

Proposition 12 *Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension n. Soit F un sev de E et $u_1, \dots, u_p$ p vecteurs de F.*
(1) $(u_1, \dots, u_p)$ est libre ssi $rg(u_1, \dots, u_p) = p$.
(2) $(u_1, \dots, u_p)$ engendre F (i.e $F = Vect(u_1, \dots, u_p)$) ssi $rg(u_1, \dots, u_p) = \dim F$.
(3) $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de F ssi $rg(u_1, \dots, u_p) = \dim F = p$.

Preuve:
(1) $\boxed{\Rightarrow}$ $(u_1, \dots, u_p)$ est libre et génératrice de Vect$< u_1, \dots, u_p >$, donc en est une base donc $rg(u_1, \dots, u_p) = p$.
$\boxed{\Leftarrow}$ $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de Vect$< u_1, \dots, u_p >$. Or $(u_1, \dots, u_p)$ compte p vecteurs dans un ev de dimension p, donc $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de Vect$< u_1, \dots, u_p >$ et est donc libre.
(2) $\boxed{\Rightarrow}$ $F =$Vect$< u_1, \dots, u_p >$, donc $\dim F = \dim$Vect$< u_1, \dots, u_p >= rg(u_1, \dots, u_p)$.
$\boxed{\Leftarrow}$
  $*$ F et Vect$< u_1, \dots, u_p >$ sont deux sev de E.
  $*$ $u_1, \dots, u_p \in F$ et F est un ev donc Vect$< u_1, \dots, u_p >\subset F$.
  $*$ $\dim F = \dim$Vect$< u_1, \dots, u_p >$.
Conclusion: $F = Vect(u_1, \dots, u_p)$.
(3) (1) et (2) à la fois.

■

4.2.2 Calcul du rang d'une famille de vecteurs

Comment calculer le rang d'une famille de vecteurs?

Remarque 13 Calculer le rang de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ revient à chercher la dimension de $Vect(u_1, \dots, u_p)$, donc une base de $Vect(u_1, \dots, u_p)$. Il suffit donc d'étudier la liberté de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ puisqu'elle est déjà génératrice de $Vect(u_1, \dots, u_p)$. On reprend donc les méthodes précédentes pour étudier la liberté de la famille $(u_1, \dots, u_p)$:

POINT MÉTHODE 1 : "vectoriellement" → penser au lemme de réduction...
1. on trouve une ou plusieurs équations de liaison entre les vecteurs puis on utilise le lemme de réduction jusqu'à temps d'obtenir une famille libre.
Rappel: pour trouver les équations de liaison, soit on les "voit", soit on pose un système linéaire.
2. Ne pas oublier de montrer la liberté de la famille "réduite qui reste".

Exemple 17 Reprendre l'exemple 15 (E) et la remarque 9 (2).

POINT MÉTHODE 2 : "matriciellement"
On forme la matrice dont les colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs de la famille (dans la même base)!!
Puis on calcule le rang (nombre de pivots) de cette matrice par la méthode du pivot de Gauss.

Exemple 18 Déterminer le rang de la famille $(u_1, \dots, u_5)$ de $\mathbb{R}^5$, donnée par:

$$u_1 = (1,3,-1,2,0)\ u_2 = (-1,2,1,2,3)\ u_3 = (3,-1,-3,-2,-6)\ u_4 = (-1,0,1,3,2)\ u_5 = (1,5,-1,1,1)$$

Généralisation (admise): Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension n, et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de E.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice dont la colonne C_j contient les coordonnées du vecteur u_j dans la base $\mathcal{B}$.
On note R une réduite de Gauss de A.
(1) $rg(u_1, \dots, u_p) =$ nb de pivots de $R = rg(A)$.
(2) les colonnes de A correspondant aux colonnes de R contenant les pivots forment une base de $Vect(u_1, \dots, u_p)$.