Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Mme MOREL

Variables aléatoires : loi – espérance

1 Calcul d'une valeur approchée d'une espérance

Proposition 1 (Loi faible des grands nombres)
Soit X une variable aléatoire.
Soient $X_1, \ldots, X_m$ des variables indépendantes et identiquement distribuées, toutes de même loi que X. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\overline{X_m} = \frac{X_1 + \ldots + X_m}{m} \quad \text{(moyenne empirique)}$$

Alors l'écart entre la moyenne empirique et l'espérance de X tend vers 0, au sens où:

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \lim_{m \to +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_m}{m} - E(X)\right| > \varepsilon\right) = 0\cdot$$

Remarque 1 Autrement dit, si on simule m fois la loi de X, alors pour m suffisamment grand ($m \to +\infty$), la moyenne empirique est une valeur approchée de l'espérance de X.
ALGORITHME:

Preuve:
* Puisque toutes les variables sont de même loi, elles ont donc la même espérance, donc par linéarité:

$$E(\overline{X_m}) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} E(X_k) = \frac{1}{m} \times mE(X) = E(X)\cdot$$

* Pour la variance: puisque $X_1, \ldots, X_m$ sont deux à deux indépendantes, alors $V(X_1 + X_2 + \ldots + X_m) = \sum_{k=1}^{m} V(X_k)$.

Donc, comme elles ont toutes la même loi:

$$V(\overline{X_m}) = \frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{m} V(X_k) = \frac{1}{m^2} \times mV(X) = \frac{1}{m}V(X)\cdot$$

On admet le résultat suivant :

Proposition 2 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Soit X une v.a finie d'espérance m et d'écart-type σ. Alors, pour tout $a > 0$: $P(|X - m| \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{a^2}$

Remarque 2 Cette inégalité permet d'estimer comment une v.a s'éloigne de sa moyenne: cette probabilité est d'autant plus petite que a est grand (plus on s'éloigne de la moyenne, moins on a de chance de trouver X) et que σ est petit (un écart-type faible signifie que X est "concentrée" autour de sa moyenne).

Donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev entraîne, $\forall \varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_m}{m} - E(X)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X)}{m\,\varepsilon^2}.$$

Or

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_m}{m} - E(X)\right| > \varepsilon\right) \leqslant P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_m}{m} - E(X)\right| \geqslant \varepsilon\right)$$

donc : $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_m}{m} - E(X)\right| > \varepsilon\right) = 0.$

2 Exercices

Exercice 1 Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ de gauche à droite. Une puce part de la case numéro 0 et se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Les déplacements successifs de la puce sont indépendants.
Soit X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.

1. Écrire une fonction python `variable(n)` qui simule cette expérience et renvoie la valeur de X_n.
2. Écrire une fonction python `esperance(n,m)` qui calcule une valeur approchée de l'espérance de X_n.

Exercice 2 On dispose d'une pièce et d'un pion placé à l'origine d'un axe gradué. On lance n fois la pièce. A chaque lancer, on déplace le pion d'une unité vers la gauche si on obtient pile, d'une unité vers la droite si on obtient face.
On note X_n l'abscisse du pion à la fin de l'expérience.

1. Écrire une fonction python `variable(n)` qui simule cette expérience et renvoie la valeur de X_n.
2. Écrire une fonction python `esperance(n,m)` qui calcule une valeur approchée de l'espérance de X_n.

Exercice 3 Une entreprise souhaite recruter un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0, 1[$. On pose également $q = 1 - p$.
On définit la variable aléatoire X par :
$X = k$ si le $k$ième candidat réussit le test,
$X = n + 1$ si personne n'est engagé.

1. Écrire une fonction python `variable(n,p)` qui simule cette expérience et renvoie la valeur de X.
2. Écrire une fonction python `esperance(n,p,m)` qui calcule l'espérance de X.
3. Désormais, l'entreprise décide de recevoir des candidats jusqu'à ce que l'un d'entre eux réussisse le test.
   Reprendre les fonctions python des deux questions précédentes.

Exercice 4 Un rat de laboratoire est soumis à l'expérience suivante:
il est enfermé dans une cage comportant quatre portes, derrière lesquelles se trouve un morceau de gruyère. Trois des quatre portes sont munies d'un dispositif envoyant au rat une décharge électrique s'il essaye de les franchir; la quatrième laisse le passage libre.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués par le rat jusqu'à ce qu'il trouve la bonne porte.
On suppose que le rat n'a pas de mémoire: il ne se souvient pas des portes où il a eu des échecs.

1. Dans cette question, on suppose que le rat abandonne au bout de 20 essais.
   Écrire une fonction Python qui simule l'expérience aléatoire et renvoie le nombre d'essais effectués par le rat jusqu'à ce qu'il trouve la bonne porte.
   (on pose $X = 0$ si le rat n'a jamais trouvé)
2. Dans cette question, on suppose que le rat n'abandonne jamais. Écrire une fonction Python qui simule l'expérience aléatoire et renvoie le nombre d'essais effectués par le rat jusqu'à ce qu'il trouve la bonne porte.
   Écrire une fonction Python qui calcule une valeur approchée de $E(X)$.