Espaces vectoriels

I. Combinaisons linéaires.

Exercice 1 Les vecteurs u sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i?

1. $u = (1, 2)$, $u_1 = (1, 2)$; $u_2 = (2, 3)$.
2. $u = (1, 2)$, $u_1 = (1, 2)$; $u_2 = (2, 3)$; $u_3 = (-4, 5)$.
3. $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : Soit $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, U est-il combinaison linéaire de U_1, U_2?

Exercice 3 : Soit $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, -1, 0)$ et $w = (1, 1, m)$.
Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles on a $w \in Vect(u, v)$.

Exercice 4 On donne les vecteurs $v_1 = (0, 1, 2, 3)$, $v_2 = (3, 2, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 1, 1, 1)$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ soit un élément du sev F engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$.

II. Espaces vectoriels – sous espaces vectoriels.

Exercice 5 : Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels?

1. $F_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R}) \mid x + 2y = 0\}$
2. $F_6 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) / x + y + 3z = 2\}$
3. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0 \text{ et } x + y + 3z = 0\}$
4. $F_5 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - z = 0 \text{ et } y - t = 0\}$
5. $F_3 = \{(2a + b, 3a - b, a) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
6. $F_8 = \{(a + b, 4a - b, 5a + 2b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
7. $F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 0\}$
8. $F_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xyz = 0\}$

Exercice 6 Soient $u = (1, 1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 1, 0)$ et $w = (0, 0, 1, 1)$. Déterminer $\text{Vect}\{u, v, w\}$.

Exercice 7 Montrer que $\text{Vect}\{u, v, w, s\} = \mathbb{R}^4$, où :
$u = (-1, 1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1, 1)$, $w = (1, 1, -1, 1)$ et $s = (1, 1, 1, -1)$.

Exercice 8 Donner un système d'équations des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs suivants:

1. $u_1 = (1, 2, 3)$ et $u_2 = (-1, 0, 1)$.
2. $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 On considère quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (1, 2, 3),\ u_2 = (2, -1, 1),\ u_3 = (1, 0, 1) \text{ et } u_4 = (0, 1, 1).$$

1. Montrer que $u_3 \in Vect(u_1, u_2)$ et $u_4 \in Vect(u_1, u_2)$. En déduire que $Vect(u_3, u_4) \subset Vect(u_1, u_2)$.
2. Montrer que $Vect(u_1, u_2) = Vect(u_3, u_4)$.

Exercice 10 Montrer que les sous espaces vectoriels F et G de E sont égaux :

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = Vect\{(1, 1, 3); (1, -1, -1)\}$ et $G = Vect\{(1, 0, 1); (2, -1, 0)\}$.

2. $E = \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$. Soient les matrices:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ N_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

   On note $F = Vect\{M_1, M_2\}$ et $G = Vect\{N_1, N_2\}$.

III. Familles libres, génératrices, bases.

Exercice 11 :

1. **(reprise de l'exercice 5)**
   Donner une famille génératrice des espaces vectoriels de l'exercice 1, puis en donner base et dimension.
2. Donner une base et la dimension de $E_2 = Vect\,((1,-2,3),(-1,2,2),(-1,2,-2))$.

Exercice 12 : On considère les vecteurs :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la famille $\{V_1, V_2\}$ est libre. De même pour les familles $\{V_3, V_2\}$ et $\{V_1, V_3\}$.
2. La famille $\{V_1, V_2, V_3\}$ est-elle libre ?

Exercice 13 Dire si les familles suivantes sont libres ou liées.

$$\mathcal{F}_1 = \{(1, i, 1-i), (-i, 1, -1-i)\}$$
$$\mathcal{F}_2 = \{(1, i, 0), (0, -i, 1), (-i, 0, i)\}$$
$$\mathcal{F}_3 = \{(1, 2, -1), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$$
$$\mathcal{F}_4 = \{(1, 2, 3), (-1, 4, 6)\}$$

Exercice 14 Déterminer l'ensemble des réels k tels que la famille $((1,k,2),(-1,8,k),(1,2,1))$ soit une famille libre de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15 A quelles conditions sur le paramètre réel m la famille (u, v, w) suivante est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

1. $u = (1, 2, 1) \quad v = (2, 3, -1) \quad w = (1, 1, m)$
2. $u = (2-m, -1, 0) \quad v = (-1, 2-m, -1) \quad w = (0, -1, 2-m)$

Exercice 16 On définit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (0,-1,1)$.
Montrer que $< u_1, u_2, u_3 >$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans cette base.

Exercice 17 Soient les vecteurs $u_1 = (m, 1, 1)$, $u_2 = (1, m, 2m)$ et $u_3 = (m, 0, 1)$.
Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $< u_1, u_2, u_3 >$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Dans ce cas, donner les coordonnées d'un vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans cette base.

Exercice 18 On définit deux parties E et F de $\mathbb{R}^4$ de la manière suivante:

$$E = Vect\{(-1,2,1,0),(-1,2,0,1)\} \text{ et } F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / y = -2z + t\}$$

1. Vérifier que E et F sont des sev de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer la dimension de E ainsi qu'un système d'équations cartésiennes de E.
3. Déterminer une base de F et sa dimension.
4. On pose $G = E \cap F$. Déterminer une base de G et sa dimension.

Exercice 19 Soit $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + z - t = 0\}$ et $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x = y\}$.

1. Vérifier que E et F sont des sev de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base et la dimension de E et de F.
3. Montrer que $E \cap F$ est de dimension 2 et en déterminer une base.

IV. Rang d'une famille de vecteurs.

Exercice 20 Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes:

1. $\{(1,2,2,1);(5,6,6,5);(-1,-3,4,0);(0,4,-3,-1)\}$
2. $\{(2,0,4,2);(1,2,-2,-3);(3,1,3,4);(2,4,9,5)\}$
3. $\{(1,1,1,1);(2,1,2,1);(1,-1,1,-1);(0,1,0,1)\}$
4. $\{(m,1,1,1);(1,m,1,1);(1,1,m,1);(1,1,1,m)\}$, où m est un paramètre réel.