Espaces vectoriels

I. Espaces vectoriels – sous espaces vectoriels.

Exercice 1 : Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels?

$F_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R}) \mid x + 2y = 0\}$ $\quad F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0 \text{ et } x + y + 3z = 0\}$;

$F_3 = \{(2a + b, 3a - b, a) \,/ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ $\quad F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 0\}$

$F_5 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - z = 0 \text{ et } y - t = 0\}$ $\quad F_6 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) / x + y + 3z = 2\}$

Exercice 2 Les vecteurs u sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i?

1. $u = (1, 2)$, $u_1 = (1, 2)$; $u_2 = (2, 3)$.
2. $u = (1, 2)$, $u_1 = (1, 2)$; $u_2 = (2, 3)$; $u_3 = (-4, 5)$.
3. $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice 3 On donne les vecteurs $v_1 = (0, 1, 2, 3)$, $v_2 = (3, 2, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 1, 1, 1)$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ soit un élément du sev F engendré par $< v_1, v_2, v_3 >$.

Exercice 4 : Soit $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, -1, 0)$ et $w = (1, 1, m)$.
Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles on a $w \in Vect(u, v)$.

Exercice 5 : Soit $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, U est-il combinaison linéaire de U_1, U_2?

Exercice 6 Donner un système d'équations des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs suivants:

1. $u_1 = (1, 2, 3)$ et $u_2 = (-1, 0, 1)$.
2. $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 On considère quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (1, 2, 3),\ u_2 = (2, -1, 1),\ u_3 = (1, 0, 1) \text{ et } u_4 = (0, 1, 1)\,.$$

1. Montrer que $u_3 \in Vect(u_1, u_2)$ et $u_4 \in Vect(u_1, u_2)$. En déduire que $Vect(u_3, u_4) \subset Vect(u_1, u_2)$.
2. Montrer que $Vect(u_1, u_2) = Vect(u_3, u_4)$.

Exercice 8 Montrer que les sous espaces vectoriels F et G de E sont égaux :

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = Vect < (1, 1, 3); (1, -1, -1) >$ et $G = Vect < (1, 0, 1); (2, -1, 0) >$.
2. $E = \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$. Soient les matrices:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} , M_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} , N_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} .$$

   On note $F = Vect < M_1, M_2 >$ et $G = Vect < N_1, N_2 >$.

3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ et $G = Vect < (1, 1, -2); (1, -4, 3) >$.

II. Familles libres, génératrices, bases.

Exercice 9 :

1. **(reprise de l'exercice 1)**
   Donner une famille génératrice des espaces vectoriels de l'exercice 1, puis en donner base et dimension.

2. Donner une base et la dimension de $E_2 = Vect < (1,-2,3),(-1,2,2),(-1,2,-2) >$.

Exercice 10 : On considère les vecteurs :

$$V_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$$

1. Montrer que la famille $< V_1, V_2 >$ est libre. De même pour les familles $< V_3, V_2 >$ et $< V_1, V_3 >$.

2. La famille $< V_1, V_2, V_3 >$ est-elle libre ?

Exercice 11 Dire si les familles suivantes sont libres ou liées.

$$\mathcal{F}_1 = \{(1,i,1-i),(-i,1,-1-i)\}$$
$$\mathcal{F}_2 = \{(1,i,0),(0,-i,1),(-i,0,i)\}$$
$$\mathcal{F}_3 = \{(1,2,-1),(1,0,1),(0,0,1)\}$$
$$\mathcal{F}_4 = \{(1,2,3),(-1,4,6)\}$$

Exercice 12 Déterminer l'ensemble des réels k tels que la famille $((1,k,2),(-1,8,k),(1,2,1))$ soit une famille libre de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13 A quelles conditions sur le paramètre réel m la famille (u,v,w) suivante est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

1. $u = (1,2,1) \quad v = (2,3,-1) \quad w = (1,1,m)$

2. $u = (2-m,-1,0) \quad v = (-1,2-m,-1) \quad w = (0,-1,2-m)$

Exercice 14 On définit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (0,-1,1)$.
Montrer que $< u_1, u_2, u_3 >$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans cette base.

Exercice 15 Soient les vecteurs $u_1 = (m,1,1)$, $u_2 = (1,m,2m)$ et $u_3 = (m,0,1)$.
Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $< u_1, u_2, u_3 >$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Dans ce cas, donner les coordonnées d'un vecteur $u = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans cette base.

Exercice 16 On définit deux parties E et F de $\mathbb{R}^4$ de la manière suivante:

$$E = Vect\{(-1,2,1,0),(-1,2,0,1)\} \text{ et } F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / y = -2z + t\}$$

1. Vérifier que E et F sont des sev de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer la dimension de E ainsi qu'un système d'équations cartésiennes de E.

3. Déterminer une base de F et sa dimension.

4. On pose $G = E \cap F$. Déterminer une base de G et sa dimension.

Exercice 17 Soit $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + z - t = 0\}$ et $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x = y\}$.

1. Vérifier que E et F sont des sev de $\mathbb{R}^4$.

2. Donner une base et la dimension de E et de F.

3. Montrer que $E \cap F$ est de dimension 2 et en déterminer une base.

III. Rang d'une famille de vecteurs.

Exercice 18 Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes:

1. $\{(1,2,2,1);(5,6,6,5);(-1,-3,4,0);(0,4,-3,-1)\}$
2. $\{(2,0,4,2);(1,2,-2,-3);(3,1,3,4);(2,4,9,5)\}$
3. $\{(1,1,1,1);(2,1,2,1);(1,-1,1,-1);(0,1,0,1)\}$
4. $\{(m,1,1,1);(1,m,1,1);(1,1,m,1);(1,1,1,m)\}$, où m est un paramètre réel.

IV. Pour aller plus loin...

Exercice 19 Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

$A=\left\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,/\,(u_n) \text{ est bornée}\right\}$ $B=\left\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,/\,(u_n) \text{ est convergente}\right\}$ $C=\left\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,/\,(u_n) \text{ est monotone}\right\}$
$D=\left\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,/\,(u_n) \text{ est arithmétique}\right\}$

Exercice 20 Soit $A=\left\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,/\,\exists\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\,,\,M=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}\right\}$.
Montrer que A est un espace vectoriel , et en donner base et dimension.

Exercice 21 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et F, G deux sous espaces vectoriels de E. On définit l'ensemble :

$$F+G=\{u+v\,/\,u\in F \text{ et } v\in G\}$$

Montrer que $F+G$ est un sous espace vectoriel de E.

Exercice 22 Soit l'espace vectoriel $E=\mathcal{F}\left([-1,1],\mathbb{R}\right)$. F est-il un sous espace vectoriel de E quand F est l'ensemble des fonctions :

1. dérivables sur $[-1,1]$.
2. paires
3. croissantes sur $[-1,1]$.