Applications linéaires et matrices

BCPST 1C – Mme MOREL

INTRODUCTION

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et p, n deux entiers naturels.
Le mot “linéaire” a déjà été plusieurs fois rencontré au cours de l'année: opérateur $\sum$, dérivation, intégrale, espérance, transposition d'une matrice... Plus précisément:

Dans ce chapitre, on se limite aux espaces vectoriels $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$.

1 Applications linéaires

1.1 Définition et propriétés

***Définition 1* :**
(1) Une application $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ est **linéaire** *si:*

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^p\,,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\,,\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)\,.$$

(2) L'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est noté $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.
(3) Si $n = 1$, une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ est appelée **forme linéaire**.
(4) Si $n = p$, une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ est appelée **endomorphisme de** $\mathbb{K}^n$*, et l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ est noté $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.*

Exemple 1 :
(1) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, y-z) \end{array}$

(2) Soit l'application f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ telle que: $f(x,y,z,t) = 2x + y - z + 3t$.
Montrer que f est une forme linéaire.

Proposition 1 *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Alors:*
(1) $f(O_p) = O_n$, où O_p (resp. O_n) désigne le vecteur nul de $\mathbb{K}^p$ (resp. $\mathbb{K}^n$).
(2) $\forall x \in \mathbb{K}^p$, $f(-x) = -f(x)$.
(3) $\forall x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}^p$, $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, $f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k) = \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_k f(x_k)$.

Preuve:

■

1.2 Opérations

Proposition 2 **(somme et multiplication par un scalaire):** *Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.*
(1) $f + g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.
(2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Preuve:

∎

Corollaire 1 *$\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.*

Preuve:

∎

Proposition 3 **(composée):** *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. Alors $g \circ f$ est une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^m$.*

Preuve:

∎

Remarque 1 :
• On sait déjà que $(\lambda f_1 + \mu f_2) \circ g = \lambda f_1 \circ g + \mu f_2 \circ g$.
En effet:

→ *a-t-on besoin de la linéarité des applications?*

• Étudions la distributivité à gauche: $g \circ (\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda g \circ f_1 + \mu g \circ f_2$.

→ *Que se passe-t-il?*

Proposition 4 *$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, $\forall g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $g \circ (\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda g \circ f_1 + \mu g \circ f_2$.*

Preuve:

∎

Ne remarquez-vous pas des ressemblances entre la loi $\circ$ et la multiplication dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$?

Conclusion: on prendra souvent la notation multiplicative $\times$ pour désigner la composition $\circ$, c'est-à-dire:

* on écrira $g\,f$ au lieu de $g \circ f$,
* on écrira f^n au lieu de $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$, avec la convention $f^0 = Id$.

Mais ATTENTION!! La loi $\circ$ n'est pas ...

1.3 Applications linéaires bijectives

Définition 2 *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.*
(1) Si f est bijective, on dit que f est un **isomorphisme**.
(2) Si $n = p$. Si f est bijective, on dit que f est un **automorphisme de $\mathbb{K}^n$**.
(en d'autres termes, un automorphisme de $\mathbb{K}^n$ est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{K}^n$)
On note $\mathcal{GL}(\mathbb{K}^n)$ l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{K}^n$, appelé **groupe linéaire de $\mathbb{K}^n$**

Remarque 2 Puisqu'on peut noter multiplicativement la composition, la réciproque d'une application bijective est aussi appelée inverse.

Proposition 5 *Soit f un isomorphisme de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$. Alors son inverse f^{-1} est une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$.*

Preuve:

■

Proposition 6 *Soient $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^p)$ deux isomorphismes, alors $g \circ f$ est un isomorphisme et*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Preuve:

■

2 Matrices et applications linéaires

Introduction

2.1 Écriture matricielle d'une application linéaire

Définition 3 *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$*,* $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ *une base de* $\mathbb{K}^p$ *et* $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ *une base de* $\mathbb{K}^n$*.*
On appelle **matrice de** f **dans les bases** $\mathcal{E}$ **et** $\mathcal{F}$*, la matrice de* $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ *notée* $\boxed{mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)}$*, définie par:*
la colonne j *contient les coordonnées du vecteur* $f(e_j)$ *dans la base* $\mathcal{F}$*.*

Plus précisément, si $f(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})_{\mathcal{F}}$ *alors* $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.

Remarque 3 Les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ étant fixées, combien de matrices représentent l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$?

Remarque 4 :
(1) Si f est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ alors $mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$, où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des bases de $\mathbb{K}^n$ (peuvent être les mêmes!) est carrée d'ordre n.
(2) Pour une forme linéaire, on obtient une matrice ligne.
exemple: $f(x, y, z, t) = 2x - 3y + 5z - t$, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

(3) Si $f = id_{\mathbb{K}^n}$, alors
 $*$ $mat_{\mathcal{B}_{can}}(id) = I_n$.
 $*$ Si on change de base: $mat_{\mathcal{E}}(id) = \ldots$
 $*$ Si on ne prend pas la même base: $mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(id) = I_n$?

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 : Déterminer la matrice d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$**.**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (-y + z, x - 2z) \end{array}$$

1. On prend une base (canonique par défaut) $(e_1, \ldots, e_p)$ de $\mathbb{K}^p$, puis on calcule $f(e_1)$, ..., $f(e_p)$:
   Par exemple:

   $\mathcal{E}_1$: base canonique

   $\mathcal{E}_2 = < (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1) >$

2. Une base $\mathcal{F}$ (canonique par défaut) de $\mathbb{K}^n$ étant donnée, on calcule les coordonnées de $f(e_1)$, ..., $f(e_p)$ <u>dans la base $\mathcal{F}$:</u>
   Par exemple:

   $\mathcal{F}_1$: base canonique

   $\mathcal{F}_2 = < (1,1), (0,1) >$
   Cas 1: $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{F}_1$

   Cas 2: $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{F}_2$

   Cas 3: $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{F}_2$

3. On range les coordonnées obtenues en colonnes (ATTENTION À L'ORDRE DES COLONNES!!)

Exemple 2 (reprise des exemples 2 et 3):

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, 2x+y, y-z) \end{array} \quad \text{et } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2y+z, x+y-2z, -2x+y+z) \end{array}.$$

Proposition 7 *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, $A = mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$, où $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$) est une base de $\mathbb{K}^p$ (resp. $\mathbb{K}^n$).*
Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p)_{\mathcal{E}} \in \mathbb{K}^p$, on note $y = f(x) = (y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{F}} \in \mathbb{K}^n$.
Matriciellement:

Notant X la matrice qui représente le vecteur x dans la base $\mathcal{E}$: $X = mat_{\mathcal{E}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$;

et $Y = mat_{\mathcal{F}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, la matrice qui représente le vecteur $y = f(x)$ dans la base $\mathcal{F}$. Alors $Y = A\,X$, qu'on écrit:

$$\boxed{mat_{\mathcal{F}}(f(x)) = mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) \times mat_{\mathcal{E}}(x)} \text{ (notez la cohérence des bases...)}$$

Preuve:

■

Exemple 3 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer $f(x, y, z)$, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Remarque 5 Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ telle que:

$$\forall x \in \mathbb{K}^p \, , \, mat_{\mathcal{F}}(f(x)) = A \times mat_{\mathcal{E}}(x) \, .$$

Alors $A = mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$.
Preuve:

■

2.2 Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires

Proposition 8 *Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, et $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$) une base de $\mathbb{K}^p$ (resp. $\mathbb{K}^n$). Alors:*

$$\boxed{mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f + g) = mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) + mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(g)}$$

Preuve:

■

Proposition 9 *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, et $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$) une base de $\mathbb{K}^p$ (resp. $\mathbb{K}^n$). Alors, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$:*

$$\boxed{mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\lambda f) = \lambda \, mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)}$$

Preuve:

■

2.3 Matrice de la composée d'applications linéaires

Proposition 10 *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^m)$, $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$, et $\mathcal{E}$ une base de $\mathbb{K}^p$, $\mathcal{F}$ une base de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{G}$ une base de $\mathbb{K}^m$. Alors:*

$$\boxed{mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(g \circ f) = mat_{\mathcal{G},\mathcal{F}}(g) \times mat_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(f)}$$

Preuve:

$\blacksquare$

Remarque 6 : cas particuliers.
(1) Si f est un endomorphisme: $mat_{\mathcal{E}}(f \circ f) = (mat_{\mathcal{E}}(f))^2$.
Ou encore, utilisant la notation multiplicative: $mat_{\mathcal{E}}(f^2) = (mat_{\mathcal{E}}(f))^2$.
Généralisation: $\boxed{mat_{\mathcal{E}}(f^n) = (mat_{\mathcal{E}}(f))^n}$
(2) Si f est un isomorphisme:

Proposition 11 *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, et $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ deux bases de $\mathbb{K}^n$. Alors:*
f est un isomorphisme (bijective) ssi $mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ est inversible.
Dans ce cas: $\boxed{mat_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f^{-1}) = (mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f))^{-1}}$

Preuve:

$\blacksquare$

Exemple 4 $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y - z, 2x + y, y - z) \end{array}$

Exemple 5 $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2y+z, x+y-2z, -2x+y+z) \end{array}$.
A vous:

POINT MÉTHODE 1 : Comment montrer que f est bijective?
$*$ il suffit de montrer que $\ker f = \{O\}$ (voir partie 3)
$*$ il suffit d'étudier *l'inversibilité de* A (calcul du rang de A, et donc du rang de f (partie 3)).
$*$ Pour calculer f^{-1}, il suffit de connaître la matrice qui la représente, donc on calcule A^{-1}. On "récupère" $f^{-1}(x)$ par le produit matriciel...

3 Noyau et image d'une application linéaire

3.1 Noyau

Définition 4 *Le* **noyau** *d'une application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est l'ensemble noté* $\ker f$ *défini par:*

$$\ker f = \{x \in \mathbb{K}^p / f(x) = O_n\}$$

(autrement dit: le noyau est l'ensemble des antécédents du vecteur nul de $\mathbb{K}^n$)

Proposition 12 $\ker f$ *est un sev de* $\mathbb{K}^p$.

Preuve:

$\blacksquare$

CAPACITÉ EXIGIBLE 2 :

$$\boxed{\textbf{CALCUL D'UN NOYAU} \rightarrow \underbrace{\textbf{RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME LINÉAIRE HOMOGÈNE}}_{\textbf{(équations)}} \\ \rightarrow \textbf{base et dimension}}$$

Exemple 6 $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, y-z) \end{array}$

Exemple 7 :

$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, 2x+y, y-z) \end{array}$

$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2y+z, x+y-2z, -2x+y+z) \end{array}.$

A quoi sert un noyau? Il caractérise l'injectivité...
Rappel: $f : E \to F$ est injective ssi $\forall x, y \in E$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (au plus un antécédant)

Théorème 1 *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. f est injective ssi $\ker f = \{O_p\}$.*

Preuve:

$\blacksquare$

POINT MÉTHODE 2 :
On a $\ker f = \{O\}$ ssi $\forall x \in \mathbb{K}^p,\ f(x) = O_n \Rightarrow x = O_p$.
En effet:

Donc: pour montrer que $\ker f = \{O\}$, il suffit de montrer que $\forall x \in \mathbb{K}^p$, si $f(x) = O_n$ alors $x = O_p$. Soit encore:

$$\ker f = \{O\} \iff \text{le système linéaire homogène associé } (\mathcal{S}) \text{ a une unique solution. (la nulle)}$$

Exemple 8 (suite des exemples 6 et 7):

Remarque 7 A RETENIR: si $n = p$, notons A la matrice qui représente f dans une base de $\mathbb{K}^n$. Alors:

$$\begin{aligned} \ker f = \{O\} &\iff (\mathcal{S}) \text{ est de Cramer (voir le point méthode précédent)} \\ &\iff rg(\mathcal{S}) = n \\ &\iff rgA = n \\ &\iff A \text{ est inversible}. \end{aligned}$$

3.2 Image

Définition 5 *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. L'* **image** *de f est l'ensemble $f(\mathbb{K}^p)$ (image de $\mathbb{K}^p$ par f), noté Imf:*

$$Imf = \{y \in \mathbb{K}^n / \exists x \in \mathbb{K}^p,\ f(x) = y\} = \{f(x) / x \in \mathbb{K}^p\}.$$

Proposition 13 *Imf est un sev de $\mathbb{K}^n$.*

Preuve:

$\blacksquare$

CAPACITÉ EXIGIBLE 3 :

$$\boxed{\textbf{CALCUL D'UNE IMAGE} \rightarrow \underbrace{\textbf{COMPATIBILITÉ D'UN SYSTÈME LINÉAIRE}}_{\textbf{(équations)}} \quad \rightarrow \textbf{base et dimension}}$$

Exemple 9 $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y, y - z) \end{array}$

Exemple 10 :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, 2x+y, y-z) \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2y+z, x+y-2z, -2x+y+z) \end{array}.$$

$\rightarrow$ *A quoi sert l'image? Elle caractérise la surjectivité...*

Théorème 2 *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. f est surjective ssi $Imf = \mathbb{K}^n$.*

Preuve:

$\blacksquare$

Théorème 3 *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$ (pas forcément la base canonique!). Alors*

$$\boxed{Imf = Vect\,(f(u_1), \ldots, f(u_p))}$$

Remarque 8 Ce théorème dit que: pour tout vecteur u de $\mathbb{K}^p$, il existe p scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que

$$f(u) = \lambda_1\, f(u_1) + \ldots + \lambda_p\, f(u_p)\,.$$

Il suffit donc de connaître $f(u_1), \ldots, f(u_p)$ pour connaître l'image de tout vecteur de $\mathbb{K}^p$ par f, soit encore:
une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'**une** base (ne dépend pas du choix de la base).

Preuve:

■

CAPACITÉ EXIGIBLE 4 Ce théorème donne une autre méthode (plus "vectorielle") pour calculer une image:

$$\textbf{CALCUL D'UNE IMAGE} \rightarrow \underbrace{\textbf{LIBERTÉ DE LA FAMILLE } f(u_1), \ldots, f(u_p)}_{\textbf{(lemme de réduction)}} \rightarrow \textbf{base et dimension}$$

Exemple 11 (reprise des exemples 9 et 10):

3.3 Théorème du rang

Remarque 9 :
(1) On a: $\dim(Imf) = \dim Vect(f(u_1), \ldots, f(u_p)) = rg(f(u_1), \ldots, f(u_p))$, d'où la définition suivante.
(2) A RETENIR: si $n = p$, notant A la matrice qui représente f dans une base $< u_1, \ldots, u_n >$ de $\mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned} Imf = \mathbb{K}^n &\iff (f(u_1), \ldots, f(u_n)) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n \\ &\iff rg(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = n \\ &\iff \text{ le système linéaire de matrice } A \text{ est de Cramer} \\ &\iff A \text{ a } n \text{ pivots} \\ &\iff rgA = n\,. \end{aligned}$$

Définition 6 *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. On appelle* **rang de** *f la dimension de Imf et on note:*

$$rgf = \dim(Imf)\,.$$

Théorème 4 **(ADMIS) : Théorème du rang** *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Alors :*

$$\dim(\ker f) + rgf = \dim(\mathbb{K}^p) = p$$

POINT MÉTHODE 3 (facultative)
Ce théorème donne une autre méthode pour déterminer le noyau d'une application linéaire :

3.4 Endomorphismes bijectifs

Dans cette partie $n = p$. Réunissons les remarques 7 et 9. On obtient:

Conclusion: si $n = p$

- $\ker f = \{O\}$ ssi f injectif ssi f surjectif ssi f bijectif ssi $rgf = n$
- On remarque que $rgf = rgA$, où A est la matrice qui représente f dans une base de $\mathbb{K}^n$.
  Le rang n'est donc pas que le nombre de pivots d'un système linéaire ou de sa matrice associée, c'est aussi:

  $*$ *liberté de la famille engendrée par les colonnes d'une matrice (ou le plus grand nombre de vecteurs linéairement indépendants)*

  $*$ $\dim$*(Imf) où f est l'application linéaire représentée dans certaines bases par la matrice.*
- f bijective ssi A inversible.