

Calcul intégral

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Primitives d'une fonction continue

Définition 1 Soit f une fonction continue sur un intervalle I . On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Exemple 1 :

- * \ln est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.
- * \sin est une primitive de \cos sur \mathbb{R} .

Remarque 1 f étant continue sur I , F est de classe \mathcal{C}^1 sur I c'est-à-dire : F est dérivable sur I et sa dérivée $F' = f$ est continue sur I .

Théorème 1 (théorème d'existence), admis: Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I .

Remarque 2 Les primitives des fonctions usuelles sont à connaître par coeur: cf tableau.

Mais ATTENTION! On ne peut pas toujours exprimer une primitive à l'aide des fonctions usuelles!!

Par exemple, il a fallu introduire la fonction logarithme pour pouvoir exprimer une primitive de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$.

Proposition 1 Soit f une fonction continue sur un intervalle I . f admet une infinité de primitives sur I ; deux primitives différent à une constante près.

En d'autres termes: soit F une primitive de f sur I (théorème d'existence). Alors l'ensemble des primitives de f sur I est de la forme: $\{F + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Preuve:

■

Remarque 3 :

(1) Importance d'être sur un intervalle!!

La constante peut varier d'un intervalle à l'autre... Exemple :

$$\forall x \neq 0, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(2) Pour obtenir une primitive *unique* sur un intervalle, on fixe la constante en imposant une condition (cf condition initiale en physique), du style $F(x_0) = y_0$.

Exemple 2 \ln est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Proposition 2 Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , admettant respectivement F et G comme primitive sur I . Alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda F$ est une primitive de λf sur I .

Preuve: $(F + G)' = F' + G' = f + g$ et $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$...

■

Remarque 4 :

(1) Cette propriété est équivalente à: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.

(2) ATTENTION AU PRODUIT!!! $F G$ n'est pas une primitive de $f g$!!

En effet: $(F G)' = f G + F g$...

(3) Pour une composée, cf plus loin: formule du changement de variable.

2 Définition de l'intégrale

2.1 Lien entre primitives et intégrale

Définition 2 Soient f une fonction continue sur un intervalle I , $a, b \in I$. Soit F une primitive (quelconque) de f sur I .

On appelle **intégrale de f de a à b** le nombre réel $F(b) - F(a)$ que l'on note: $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$

Dans les calculs, la différence $F(b) - F(a)$ est notée $[F(t)]_a^b$.

Remarque 5 :

(1) Cette définition a bien un sens: **l'intégrale ne dépend pas du choix de la primitive:**

(2) On a les relations: $\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^a f(t) dt = 0$

$\int_b^a f(t) dt = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = - \int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^a f(t) dt = F(a) - F(a) = 0$.

(3) t est appelée **variable d'intégration** (cf compteur pour \sum): elle est muette donc $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx$.

On note parfois: $\int_a^b f$.

Exemple 3 $\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{ne dépend pas de } t} dt = [f(x)t]_a^b = f(x)(b-a) = f(x) \int_a^b dt$, donc $\int_a^b f(x) dt \neq \int_a^b f(t) dt!!!!$

2.2 Premières propriétés de l'intégrale

Proposition 3 (linéarité): Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , $a, b \in I$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors:

$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ et $\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$.

Preuve:

Remarque 6 Propriété équivalente à : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$

Proposition 4 (relation de Chasles): Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tous $a, b, c \in I$:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Preuve:

2.3 Interprétation géométrique de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

- Si f est *positive* sur $[a, b]$. Alors $\int_a^b f$ est l'aire du domaine délimité par les droites $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et la courbe représentative \mathcal{C}_f de f .

- Si f est *négative* sur $[a, b]$. $-f$ est positive donc $\int_a^b (-f)$ est l'aire du domaine délimité par les droites $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et la courbe symétrique de \mathcal{C}_f par rapport à (O_x) . Or $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$, donc $\int_a^b f$ est l'opposé de l'aire du domaine délimité par les droites $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et la courbe symétrique de \mathcal{C}_f par rapport à (O_x) .

- Si f change de signe sur $[a, b]$. Alors $\int_a^b f$ est la différence entre la somme des aires des domaines délimités par \mathcal{C}_f et au dessus de (O_x) et la somme des aires de ceux délimités par \mathcal{C}_f et en dessous de (O_x) .

3 Calcul intégral

3.1 Recherche de primitives usuelles

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 :

1. Puisque l'intégrale ne dépend pas du choix de la primitive, on **choisit** en général la constante égale à 0.
2. *Coeur de la méthode:*

Faire apparaître une dérivée u' afin de se ramener aux primitives de fonctions du type:

$$u' e^u \text{ ou } u' u^n \text{ ou } \frac{u'}{2\sqrt{u}} \text{ ou } \frac{u'}{u^n} \text{ ou } \frac{u'}{1+u^2} \text{ etc... (voir le tableau des primitives usuelles)}$$

3. Puisque l'intégrale est linéaire, les constantes multiplicatives ne gênent jamais en intégration. (elles "sortent" de l'intégrale)

Exemple 4 :

$$(1) I = \int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} dt = \dots$$

(2) $J = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \dots$

(3) Donner une primitive de f sur $] - 1, 1[$: $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}$.

3.2 Intégration par parties

Théorème 2 Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I . Pour tous $a, b \in I$:

$$\int_a^b u'(t) v(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) dt$$

Preuve:

■

Exemple 5 $I = \int_1^2 t^3 \ln t dt.$

CAPACITÉ EXIGIBLE 2 : faire apparaître une dérivée → IPP
on ne connaît pas la fonction \ln mais beaucoup mieux sa dérivée...

Les fonctions t^3 et $\ln t$ étant \mathcal{C}^1 sur $]1, 2[$, par IPP:

Exemple 6 $J = \int_0^1 x^2 e^x dx.$

CAPACITÉ EXIGIBLE 3 : BAISSER un degré → DÉRIVER, l'AUGMENTER → PRIMITIVER
on veut diminuer le degré de x^2 de deux crans ⇒ deux IPP successives...

On retrouvera cette méthode dans les suites d'intégrales pour obtenir une relation de récurrence.

Les fonctions x^2 et e^x étant \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, par IPP:
 $J = \dots$

On recommence: par IPP, $\int_0^1 x e^x dx = \dots$

Conclusion: $J = e - 2$.

Exemple 7 : Illustration de la capacité exigible 3.

- **Polynômes exponentielles**

But: calculer l'intégrale de fonctions du type $f(x) = P(x) e^{\alpha x}$, où P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et α un réel.

Intégrations par parties successives: Diminuer le degré du polynôme (en le dérivant) jusqu'à ce qu'il ne reste plus que l'exponentielle à intégrer.

Puisque le degré du polynôme diminue d'un "cran" à chaque IPP, il faut faire IPP successives.

exemple: $I = \int_0^1 (x^2 + 1) e^{-x} dx.$

- Calculer l'intégrale des fonctions du type: $f(x) = P(x) \sin(\alpha x)$ ou $f(x) = P(x) \cos(\alpha x)$
Principe: Diminuer le degré du polynôme (en le dérivant) jusqu'à ce qu'il ne reste plus que le cosinus ou le sinus à intégrer.
Puisque le degré du polynôme diminue d'un "cran" à chaque IPP, il faut faire (deg P) IPP successives.
- Calculer l'intégrale des fonctions du type: $f(x) = \sin(\alpha x) e^{\beta x}$ ou $f(x) = \cos(\alpha x) e^{\beta x}$
Principe: On effectue deux IPP successives **de même sens** (soit on dérive deux fois l'exponentielle, soit on la primitive deux fois) pour aboutir à une équation, dont l'inconnue est l'intégrale cherchée.

exemple: $I = \int_0^\pi \sin(2x) e^{-x} dx.$

3.3 Changement de variable

Théorème 3 Soient f continue sur un intervalle I et $\alpha, \beta \in I$. Soit u de classe \mathcal{C}^1 sur $[\alpha, \beta]$ telle que $u([\alpha, \beta]) \subset I$. Alors:

$$\int_\alpha^\beta f(u(t)) u'(t) dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x) dx$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable \mathcal{C}^1 $x = u(t)$

Remarque 7 : Mise en oeuvre du changement de variable \mathcal{C}^1 $x = u(t)$:

Trois choses à changer:

- * **Les bornes:**
- * **La variable:**
- * **La différentielle:** "à la physicienne"

Exemple 8 $I = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt.$

Changement de variable \mathcal{C}^1 : $x = \sqrt{t}$. Alors:

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} e^x \times 2 \underbrace{dx}_{dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt} = 2[e^x]_1^{\sqrt{2}} = 2(e^{\sqrt{2}} - e).$$

Preuve: Soit F une primitive de f sur I , alors $F \circ u$ est \mathcal{C}^1 sur $[\alpha, \beta]$ et $(F \circ u)' = (f \circ u) u'$. Donc:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) u'(t) dt = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x) dx$$

■

Remarque 8 ATTENTION! Toujours bien vérifier que le changement de variable est licite...

exemple: $K = \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$. Changement de variable $t = \tan x$:

Or $x \mapsto \frac{1}{1 + \cos^2 x}$ est continue et strictement positive sur $[0, \pi]$ donc $K > 0$...!
Où est l'erreur?

Exemple 9 : Polynômes trigonométriques

But: calculer l'intégrale de fonctions du type $f(t) = \cos^n t \sin^p t$, où $n, p \in \mathbb{N}$.

POINT METHODE 1 :

1. Commencer par vérifier qu'il n'y a pas de primitive usuelle!

exemple: $f(t) = \cos t \sin^2 t$...

2. Si non, on étudie la parité de n et p :

* **Premier cas:** l'une au moins des deux puissances est impaire \rightarrow changement de variable.

Poser $x = \begin{cases} \sin t & \text{si } n \text{ est impair} \\ \cos t & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$
--

exemple: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 t \cos^3 t dt$.

* **Deuxième cas:** les deux puissances sont paires \rightarrow linéariser le produit $\cos^n t \sin^p t$.

exemple: $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \cos^2 t dt.$

Remarque 9 :

exemple: $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt.$ Que fait-on?

Et $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t dt.$ Que fait-on?

Conclusion: quand n et p ne sont pas trop grands, on peut aussi linéariser le produit!

Exemple 10 Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} dx.$

Proposition 5 Soit $a > 0$ et f une fonction continue sur $[-a, a]$.

(1) Si f est paire alors $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f.$

(2) Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f = 0.$

Preuve:

* Géométriquement:

* Calculs:

(1) Par la relation de Chasles: $\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt.$

POINT METHODE 2 : changement de variable $\boxed{x = -t}$

→ Méthode à retenir pour montrer qu'une fonction intégrale de ses bornes est paire / impaire

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_0^a f(x) dx \stackrel{\text{variable muette}}{=} \int_0^a f(t) dt.$$

Donc: $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f.$

(2) Si f est impaire, le même changement de variable entraîne: $\int_{-a}^0 f(t) dt = - \int_0^a f(t) dt.$ Donc $\int_{-a}^a f = 0.$

■

Proposition 6 Soit f une fonction continue et T -périodique sur \mathbb{R} . Alors:

(1) $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f = \int_0^T f.$

(2) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \int_{a+nT}^{b+nT} f = \int_a^b f.$

Preuve:

* Géométriquement:

* Calculs:

(1) Par la relation de Chasles: $\int_a^{a+T} f = \int_a^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_T^{a+T} f(t) dt.$

Changement de variable \mathcal{C}^1 : $t = x + T$ dans la dernière intégrale:

$$\int_T^{a+T} f(t) dt = \dots$$

Donc: $\int_a^{a+T} f = \int_a^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$

(2) De même, changement de variable \mathcal{C}^1 : $t = x + nT, \int_{a+nT}^{b+nT} f(t) dt = \dots$

■