

Applications linéaires

I. Écriture matricielle d'une application linéaire.

Exercice 1 Soient

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - y, x + z) \end{array} \quad \text{et } g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & 5x + y - z \end{array}$$

1. Vérifier que f et g sont linéaires.
2. Déterminer les matrices de f et g relativement aux bases canoniques.
3. Déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathcal{E} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{F} = ((1, 0), (1, 1))$ de \mathbb{R}^2 .

Exercice 2 On considère l'application f définie par:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (-2y + 3z + t, -x - 2y + 3z + t, -x + 2z + t) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 .
2. Donner la matrice de f relativement aux bases canoniques de \mathbb{R}^4 et \mathbb{R}^3 .
3. On pose:
 $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$, $u_4 = (1, 1, 1, 1)$,
 $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 2, 1)$.
 Vérifier que $\mathcal{E} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de \mathbb{R}^4 et $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ une base de \mathbb{R}^3 .
 Donner la matrice de f relativement aux bases \mathcal{E} et \mathcal{F} .

Exercice 3 :

1. On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par sa matrice dans la base canonique:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

On pose $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 0)$ et $u_3 = (0, -1, 2)$, trois vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 et donner la matrice de f dans cette base. Que remarquez-vous?

2. On note g l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par sa matrice dans la base canonique:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

On pose $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ et $v_3 = (1, -1, 1)$, trois vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 et donner la matrice de g dans cette base. Que remarquez-vous?

II. Image, noyau et applications.

Exercice 4 (suite de l'exercice 2):

Déterminer une base et la dimension de $\ker f$. Donner $rg(f)$.

Exercice 5 Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + 5y + 5z, x + 2y + 2z, x + 3y + 3z) \end{array}$$

Déterminer le noyau et l'image de f , et vérifier que le noyau est inclus dans l'image.

Exercice 6 On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Donner une base de $\ker f$ et de $\text{Im} f$.

Exercice 7 : Pour chaque application linéaire, déterminer son noyau et son image. Est-elle injective? surjective ?

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par: $f(x, y) = (x + y, x - y, x + y)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par: $f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$.

Exercice 8 Soient les applications linéaires:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - 2y + z, x + y - 2z, -2x + y + z) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (4x + y, x - y, 2x + 3y) \end{array}$$

Déterminer le rang, l'image et le noyau de ces applications linéaires. On précisera si elles sont injectives, surjectives et / ou bijectives.

Si elles sont bijectives, on donnera l'application réciproque.

Exercice 9 Soit $m \in \mathbb{R}$ et f_m l'endomorphisme:

$$f_m : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & ((1 + m)x + 3y, -x + (1 - m)y) \end{array}$$

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles f_m n'est pas bijective. Pour chacune de ces valeurs, déterminer le noyau et l'image de f_m .

Exercice 10 Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de E défini par les données des images des vecteurs de la base:

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3 \quad u(e_2) = 3e_2 \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3$$

1. Déterminer une base de $\ker u$. u est-elle injective? peut-elle être surjective? pourquoi?
2. Déterminer une base de $\text{Im} u$. Quel est le rang de u ?

III. Polynôme d'endomorphisme.

Exercice 11 On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . On désigne par h l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont l'expression analytique est :

$$\begin{cases} x' & = & -2x + y + 2z \\ y' & = & -x + y + z \\ z' & = & -2x + y + 2z \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice A de h .
2. Déterminer une base de $\ker h$. Quel est le rang de h ? Donner une base de $\text{Im} h$.
3. Déterminer la matrice de h^2 . Quel est le rang de h^2 ? Son noyau, son image?
4. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, justifier que $h^n = h^2$.

Exercice 12 Soit p un endomorphisme de \mathbb{R}^2 défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, p(x, y) = \frac{1}{5} (4x + 2y, 2x + y)$$

1. Déterminer Noyau et Image de p
2. Montrer que $p^2 = p$.

Exercice 13 On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Donner une base de $\ker f$ et de $\operatorname{Im} f$.

Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \ker f$, en déduire que $f^2 = 0$.

Déterminer M^n , pour tout entier $n \geq 2$.

Exercice 14 On considère l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est un automorphisme de \mathbb{R}^4 et donner la matrice de f^{-1} dans la base canonique. En déduire l'expression analytique de f et de f^{-1} .
2. Déterminer une relation simple entre f^2 , f et id . Retrouver alors le résultat du 1.
3. On pose $g = f - id$. Déterminer la matrice B de g dans la base canonique, puis donner une base et la dimension de $\ker g$ et $\operatorname{Im} g$.
Que vaut $rg(g)$?

Exercice 15 On considère l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $f^2 - 3f + 2id = 0$.
2. En déduire que f est un automorphisme et donner une expression analytique de f^{-1} .
3. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n = a_n f + b_n id.$$

4. En déduire l'expression analytique de f^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

IV. Pour aller plus loin: diagonalisation

Exercice 16 On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 représenté par A dans la base canonique.

1. Déterminer, en fonction du paramètre réel λ , le rang de l'endomorphisme $f - \lambda id$.
2. On note $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ les trois valeurs de λ pour lesquelles $rg(f - \lambda id) < 3$. (*appelées valeurs propres*)
Déterminer une base de $\ker(f - \lambda_i id)$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$. (*appelés espaces propres*)
3. Montrer que la famille obtenue en considérant la réunion de ces trois bases est une base de \mathbb{R}^3 .
On la notera \mathcal{C} .
Dit autrement: les espaces propres sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3
4. On note D la matrice qui représente f dans la base \mathcal{C} . Déterminer D . Que remarquez-vous ?
5. On note P (comme "passage") la matrice qui représente les vecteurs de \mathcal{C} dans la base canonique.
 - (a) Montrer SANS CALCULS que P est inversible.
 - (b) Calculer $P^{-1}AP$. Que remarquez-vous ? (*formule du changement de base*)

6. Application: déterminer l'application f^n .

Exercice 17 Soit A la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Démontrer que A est diagonalisable et donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.