Applications linéaires

I. Écriture matricielle d'une application linéaire.

Exercice 1 Soient

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y, x+z) \end{array} \quad \text{et } g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & 5x+y-z \end{array}$$

1. Vérifier que f et g sont linéaires.
2. Déterminer les matrices de f et g relativement aux bases canoniques.
3. Déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathcal{E} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = ((1,0),(1,1))$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 On considère l'application f définie par:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (-2y+3z+t, -x-2y+3z+t, -x+2z+t) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
3. On pose:
   $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (1,1,0,0)$, $u_3 = (1,1,1,0)$, $u_4 = (1,1,1,1)$,
   $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,0)$, $v_3 = (0,2,1)$.
   Vérifier que $\mathcal{E} = (u_1,u_2,u_3,u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{F} = (v_1,v_2,v_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$.
   Donner la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Exercice 3 :

1. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice dans la base canonique:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

   On pose $u_1 = (1,-1,1)$, $u_2 = (1,0,0)$ et $u_3 = (0,-1,2)$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   Montrer que $\mathcal{B} = (u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base. Que remarquez-vous?
2. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice dans la base canonique:

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

   On pose $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,-1)$ et $v_3 = (1,-1,1)$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   Montrer que $\mathcal{B} = (v_1,v_2,v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de g dans cette base. Que remarquez-vous?

II. Image, noyau et applications.

Exercice 4 (suite de l'exercice 2):
Déterminer une base et la dimension de $\ker f$. Donner $rg(f)$.

Exercice 5 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+5y+5z, x+2y+2z, x+3y+3z) \end{array}$$

Déterminer le noyau et l'image de f, et vérifier que le noyau est inclus dans l'image.

Exercice 6 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Donner une base de $\ker f$ et de $\mathrm{Im} f$.

Exercice 7 : Pour chaque application linéaire, déterminer son noyau et son image. Est-elle injective? surjective ?

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par: $f(x, y) = (x + y, x - y, x + y)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par: $f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$.

Exercice 8 Soient les applications linéaires:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2y+z, x+y-2z, -2x+y+z) \end{array} \quad \text{et } g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (4x+y, x-y, 2x+3y) \end{array}$$

Déterminer le rang, l'image et le noyau de ces applications linéaires. On précisera si elles sont injectives, surjectives et / ou bijectives.
Si elles sont bijectives, on donnera l'application réciproque.

Exercice 9 Soit $m \in \mathbb{R}$ et f_m l'endomorphisme:

$$f_m : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & ((1+m)x+3y, -x+(1-m)y) \end{array}$$

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles f_m n'est pas bijective. Pour chacune de ces valeurs, déterminer le noyau et l'image de f_m.

Exercice 10 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $rg(f)$, $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$. On précisera une base $\mathcal{B}_1$ de l'image et une base $\mathcal{B}_2$ du noyau.
2. Déterminer $\mathrm{Im} f \cap \ker f$.
3. On note $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ et l'espace $Imf + \ker f = \{y + x \in \mathbb{R}^3 / y \in Imf \text{ et } x \in \ker f\}$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im} f + \ker f$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

   Lorsque $\mathrm{Im} f \cap \ker f$ *est réduit au vecteur nul, on dit que* $\mathrm{Im} f$ *et* $\ker f$ *sont en somme directe, et on note* $\mathrm{Im} f \oplus \ker f$.

   (b) Montrer que $\mathcal{B}$ est libre. Que peut-on en déduire?
   (c) En déduire que $Imf + \ker f = \mathbb{R}^3$.

   On notera $\mathrm{Im} f \oplus \ker f = \mathbb{R}^3$ *et on dira que les espaces* $\mathrm{Im} f$ *et* $\ker f$ *sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}^3$
4. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 11 Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $< e_1, e_2, e_3 >$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de E défini par les données des images des vecteurs de la base:

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3 \quad u(e_2) = 3e_2 \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3$$

1. Déterminer une base de $\ker u$. u est-elle injective? peut-elle être surjective? pourquoi?
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im} u$. Quel est le rang de u?

III. Polynôme d'endomorphisme.

Exercice 12 On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On désigne par h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont l'expression analytique est :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x' & = & -2x+y+2z \\ y' & = & -x+y+z \\ z' & = & -2x+y+2z \end{array}\right.$$

1. Déterminer la matrice A de h.
2. Déterminer une base de $\ker h$. Quel est le rang de h? Donner une base de Imh.
3. Déterminer la matrice de h^2. Quel est le rang de h^2? Son noyau, son image?
4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, justifier que $h^n = h^2$.

Exercice 13 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Donner une base de $\ker f$ et de $\mathrm{Im} f$.
Montrer que $\mathrm{Im} f \subset \ker f$, en déduire que $f^2 = 0$.
Déterminer M^n, pour tout entier $n \geqslant 2$.

Exercice 14 On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice de f^{-1} dans la base canonique.
   En déduire l'expression analytique de f et de f^{-1}.
2. Déterminer une relation simple entre f^2, f et id. Retrouver alors le résultat du 1.
3. On pose $g = f - id$. Déterminer la matrice B de g dans la base canonique, puis donner une base et la dimension de $\ker g$ et Img.
   Que vaut $rg(g)$?

Exercice 15 On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $f^2 - 3f + 2id = 0$.
2. En déduire que f est un automorphisme et donner une expression analytique de f^{-1}.
3. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que:
   $$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; f^n = a_n\, f + b_n\, id\,.$$
4. En déduire l'expression analytique de f^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

IV. Pour aller plus loin: diagonalisation

Exercice 16 On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique.

1. Déterminer, en fonction du paramètre réel λ, le rang de l'endomorphisme $f - \lambda\, id$.
2. On note $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ les trois valeurs de λ pour lesquelles $rg(f - \lambda\, id) < 3$. (*appelées valeurs propres*)
   Déterminer une base de $\ker(f - \lambda_i\, id)$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$. (*appelés espaces propres)*
3. Montrer que la famille obtenue en considérant la réunion de ces trois bases est une base de $\mathbb{R}^3$.
   On la notera $\mathcal{C}$.
   Dit autrement: les espaces propres sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$
4. On note D la matrice qui représente f dans la base $\mathcal{C}$. Déterminer D. Que remarquez-vous ?
5. On note P (comme "passage") la matrice qui représente les vecteurs de $\mathcal{C}$ dans la base canonique.
   (a) Montrer SANS CALCULS que P est inversible.
   (b) Calculer $P^{-1}AP$. Que remarquez-vous ? (*formule du changement de base*)
6. Application: déterminer l'application f^n.

Exercice 17 Soit A la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Démontrer que A est diagonalisable et donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.