L'ensemble des polynômes réels $\mathbb{R}[X]$

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1 *On appelle* **monôme** *une application P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:*

$$\exists n \in \mathbb{N}\,,\ \exists a \in \mathbb{K} / \forall x \in \mathbb{R}\,,\ P(x) = ax^n\,.$$

$*$ *a est appelé le* **coefficient** *du monôme.*
$*$ *Si $a \neq 0$, on dit que le monôme est de degré n et on note $\deg P = n$.*

Remarque 1 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on convient de noter X^k tout monôme $\begin{array}{rcl} P : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & P(x) = x^k \end{array}$

Exemple 1 :
iX^8 est un monôme (à coefficient complexe) de degré ......
$2X^5$ est un monôme (à coefficient réel) de degré ......

On définit alors un polynôme comme une somme finie de monômes:

Définition 2 *Une* **fonction polynôme** *(ou* **polynôme***)* **à coefficients dans** $\mathbb{R}$ *est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:*

$$\exists n \in \mathbb{N}\,,\ \exists a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ \textit{tels que}\ \forall x \in \mathbb{R}\,,\ P(x) = a_0 + a_1\,x + \ldots + a_n\,x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k\,.$$

Les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont appelés les **coefficients** *du polynôme.*
On note $\boxed{\mathbb{R}[X]}$ *l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels.*

Remarque 2 :
La fonction polynôme (ou polynôme) $\begin{array}{rcl} P : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array}$

est notée plus simplement (voir les espaces vectoriels) P ou $P(X)$, avec $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Exemple 2 $P(X) = 1 + 2X \in \mathbb{R}[X]$.

Définition 3 *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.*
(1) Si P a tous ses coefficients nuls, on appelle P le **polynôme nul** *et on le note O.*
(2) Si $P(X) = a_0$, on dit que P est un **polynôme constant***.*

Exemple 3 $P(X) = 2$ est un polynôme constant.

Proposition 1 **(admise):** *un polynôme est nul ssi tous ses coefficients sont nuls.*
Autrement dit: si un polynôme s'annule en tout point de $\mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$) alors c'est le polynôme nul.

1.2 Degré d'un polynôme

Définition 4 *Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on définit son* **degré**, *noté* $\boxed{\deg P}$, *par:*

- *si P est le polynôme nul, $\deg P = -\infty$,*
- *si $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ avec $a_n \neq 0$, alors $\deg P = n$.*

On note $\boxed{\mathbb{R}_n[X]}$ *l'ensemble des polynômes de degré* ***inférieur ou égal*** *à n.*

Remarque 3 En d'autres termes, si P n'est pas le polynôme nul, $\deg P$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.

Définition 5 *Soit P un polynôme non nul: $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$.*
(1) On appelle **terme dominant** *son monôme de plus haut degré.*
(2) On appelle **coefficient dominant** *le coefficient de son terme dominant.*
(3) a_0 est appelé **terme constant**.
(4) On dit que P est **unitaire** *si son coefficient dominant vaut* 1.

Exemple 4 : $P(X) = 2 + X + X^3 \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 1 :
(1) Qui sont les polynômes de degré 0? Qui est $\mathbb{R}_0[X]$?
(2) Exprimer les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

2 Opérations sur $\mathbb{R}[X]$

2.1 Égalité

Proposition 2 *Deux polynômes sont égaux ssi leurs coefficients sont égaux.*

Preuve:
$\boxed{\Leftarrow}$ C'est clair...
$\boxed{\Rightarrow}$ Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X) = Q(X)$.
$*$ Si P et Q sont nuls:

$*$ Si P et Q sont non nuls: on note

$$P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_kX^k \text{ et } Q(X) = \sum_{k=0}^{q} b_kX^k\,, \text{ avec } a_p \neq 0 \text{ et } b_q \neq 0\,.$$

Qui sont p et q?
Sans perte de généralité, supposons $p \leqslant q$. Calculer alors $P(X) - Q(X)$:

∎

POINT MÉTHODE 1 : identification des coefficients.
Par exemple:

$$1 + X + X^2 + X^3 = c + (c+b)X + (b+a)X^2 + aX^3 \iff \begin{cases} c = \ldots \\ c+b = \ldots \\ b+a = \ldots \\ a = \ldots \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

ATTENTION! Ce sont les coefficients que l'on identifie, donc pas X dans le système!

$$1 + X + X^2 + X^3 = c + (c+b)X + (b+a)X^2 + aX^3 \iff \begin{cases} c = 1 \\ (c+b)X = X \\ (b+a)X^2 = X^2 \\ aX^3 = X^3 \end{cases} \quad \text{est FAUX!}$$

Corollaire 1 *Si deux polynômes sont égaux alors ils ont même degré.*

Preuve : Soient P et Q deux polynômes égaux.
 $*$ Si P et Q sont nuls, alors $\deg P = \ldots\ldots = \deg Q$.
 $*$ Si P est non nul, on note $n = \deg P \geqslant 0$.
Ecrire l'expression de P: $P(X) =$

Utilisons la preuve de la Proposition 2:

■

2.2 Addition

Définition 6 *Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, la* **somme de** P **et** Q, *notée $P+Q$ est l'application définie par:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ (P+Q)(x) = P(x) + Q(x)\,.$$

***Proposition 3* :** *$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $P+Q$ est un polynôme de degré:*
 $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$.
 Si $\deg P \neq \deg Q$ *alors* $\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.

Exemple 5 :
 (1) Considérons $P(X) = 1 + X^2$; $\deg P = \ldots\ldots$ et $Q(X) = 1 + 2X$; $\deg Q = \ldots\ldots$.
$(P+Q)(X) = P(X) + Q(X) =$, donc $\deg(P+Q) = 2 = \max(\deg P, \deg Q)$.
 (2) Soit $R(X) = 1 - X - X^2$; $\deg R = \ldots\ldots$.
$(P+R)(X) = P(X) + R(X) = 2 - X$, donc $\deg(P+R) = 1 < \max(\deg P, \deg R)$.
Mais si $R(X) = 1 - X + X^2$, alors $(P+R)(X) = P(X) + R(X) =$, donc $\deg(P+R) = 2 = \max(\deg P, \deg R)$.

Preuve : On note a_nX^n le terme dominant de P, donc (*que peut-on dire de n et a_n?*)

De même, on note b_mX^m le terme dominant de Q, donc (*que peut-on dire de m et b_m?*)

$*$ Si $n \neq m$, on suppose $n < m$ (le cas $n > m$ est à traiter en exercice).
$(P+Q)(X) = \ldots$

Alors le coefficient dominant de $P+Q$ est donc $\deg(P+Q) = \ldots\ldots = \max(\deg P, \deg Q)$.
$*$ Si $n = m$, a-t-on $a_n + b_m \neq 0$?
Conclure:

■

2.3 Multiplication

Définition 7 *Pour tous polynômes P et $Q \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*
 (1) **Le produit de** λ **et** P, *noté $\lambda\,P$ est l'application définie par:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ (\lambda\,P)(x) = \lambda \times P(x)\,.$$

 (2) **Le produit de** P **et** Q, *noté $P\,Q$ est l'application définie par:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ (P\,Q)(x) = P(x) \times Q(x)\,.$$

***Proposition 4* :**
(1) $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$, PQ est un polynôme de degré:

$$\deg(P\,Q) = \deg P + \deg Q\,.$$

(2) $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λP est un polynôme de degré:

$$\deg(\lambda P) = \left| \begin{array}{ll} \deg P & si\ \lambda \neq 0 \\ -\infty & si\ \lambda = 0 \end{array} \right.$$

Exemple 6 Considérons $P(X) = 1 + X^2$; $\deg P = 2$ et $Q(X) = 1 + 2X$; $\deg Q = 1$.
$(P\,Q)(X) = P(X)\,Q(X) =$
donc $\deg(P\,Q) = \ldots\ldots = \deg P + \deg Q$.

Preuve :
(1) $*$ Si $P = 0$ ou $Q = 0$ alors $PQ = 0$; donc $\deg(PQ) = \ldots\ldots = \deg P + \deg Q$.
$*$ Si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$ alors notons: $a_n X^n$ le terme dominant de P et $b_m X^m$ celui de Q.
Que peut-on dire de n, m, a_n et b_m?

Montrons que $P\,Q$ est bien un polynôme:
$(PQ)(X) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right) \left(\sum_{k=0}^{m} b_k X^k \right) =$

Donner le coefficient dominant de PQ:
Donc $\deg(PQ) = \ldots\ldots = \deg P + \deg Q$
(2) est une conséquence de (1).

■

POINT MÉTHODE 2 : Produit degré par degré
Sur un exemple : développer $(X^2 + \sqrt{2}X + 1)\,(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$.

Corollaire 2 *Une combinaison linéaire de monômes de degrés différents deux à deux ne peut être nulle que si tous les coefficients sont nuls.*

Preuve:

■

Corollaire 3 *Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,*
(1) $PQ = 0 \iff P = 0$ ou $Q = 0$.
(2) Si R est un polynôme NON NUL , $PR = QR \Rightarrow P = Q$.

Preuve :

■

2.4 Composition

Définition 8 *Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.*
La **composée de** Q **par** P*, notée $P \circ Q$ est l'application définie par:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ (P \circ Q)(x) = P(Q(x))\,.$$

Remarque 4 Si $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots a_n X^n$ alors $(P \circ Q)(X) = a_0 + a_1 Q(X) + \ldots + a_n (Q(X))^n$.

Exemple 7 Considérons $P(X) = 1 + X^2$; $\deg P = \ldots\ldots$ et $Q(X) = 1 + 2X$; $\deg Q = \ldots\ldots$.
$P \circ Q(X) = P(Q(X)) =$
et $\deg(P \circ Q) = \ldots\ldots = \deg P \times \deg Q$.

Proposition 5 *Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, où Q n'est pas un polynôme constant.*
Alors la composée $P \circ Q$ est un polynôme de degré:

$$\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q\,.$$

Preuve : Notons $b_m X^m$ le coefficient dominant de Q et $a_n X^n$ celui de P.

Alors est le terme dominant de $P \circ Q(X)$ car:
Donc $\deg(P \circ Q) = \ldots\ldots = \deg P \times \deg Q$.

■

Remarque 5 Etude du cas où Q est constant:
(1) $P(X) = 1 - 2X + X^2$ et $Q(X) = 2$. $P \circ Q(X) = \ldots$
La formule est-elle vraie?
(2) $P(X) = 1 - 2X + X^2$ et $Q(X) = 1$. Que se passe-t-il?

Dans ce cas, on dit que 1 est une racine de P (voir partie 3.)

2.5 Dérivation

Définition 9 *Soit $P \in \mathbb{R}[X] : P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \ldots + a_n X^n$.*
On définit le **polynôme dérivé** *de P, noté P' par:*

$$\left\{\begin{array}{l} P'(X) = a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + \ldots + n a_n X^{n-1} \ \textit{si}\ \deg P \geqslant 1 \\ P' = 0 \ \textit{si } P \textit{ est constant} \end{array}\right.$$

Remarque 6 De façon équivalente, on peut écrire P' avec le signe $\sum$:
si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ non constant, alors:

$$P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \underset{(k'=k-1)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k\,.$$

(on parle de dérivation terme à terme)

Remarque 7 Les formules classiques de dérivation se généralisent au cas des polynômes: $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$; $(PQ)' = P'Q + PQ'$; $(P \circ Q)' = P' \circ Q \times Q'$.

Proposition 6 *Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, P' est un polynôme de degré:*

$$\deg P' = \left|\begin{array}{cl} \deg P - 1 & \textit{si } P \textit{ est non constant} \\ -\infty & \textit{si } P \textit{ est constant} \end{array}\right.$$

Preuve : Si P est non constant, on note $a_n X^n$ son terme dominant.

$\blacksquare$

Définition 10 **(dérivées successives):**
On définit par récurrence $P^{(j)}$ *la* **dérivée** j**-ième de** P *par:*

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall j \in \mathbb{N}\,,\, P^{(j+1)} = \left(P^{(j)}\right)' \end{cases}$$

$P^{(j+1)}$ *est le polynôme dérivé de* $P^{(j)}$*.*

Exemple 8 $P(X) = 4X^3 - X + 2$, alors:
$P'(X) =$
$P''(X) =$
$P^{(3)}(X) =$
Que se passe-t-il pour $P^{(k)}(X)$, pour tout $k \geqslant 4$?

Proposition 7 $\forall j \geqslant \deg P + 1,\ P^{(j)}(X) = 0.$

Preuve:
$*$ Si P est nul ou constant:
$*$ Si $\deg P \geqslant 1$:
$\deg P' =$
$\deg P'' =$
$\vdots$
Si $m = \deg P$, $\deg P^{(m)} = \ldots$
$P^{(m)}$ est donc constant et $P^{(m+1)}$ est le polynôme nul...

$\blacksquare$

3 Factorisation d'un polynôme

3.1 Racine d'un polynôme

Définition 11 *Soient* $P \in \mathbb{R}[X]$ *et* $a \in \mathbb{R}$.
On dit que a *est* **racine** *de* P *si* $P(a) = 0$.

Proposition 8 *Soient* P *un polynôme de* $\mathbb{R}[X]$ *et* $a \in \mathbb{R}$.
a *est racine de* P *ssi il existe un polynôme* $Q \in \mathbb{R}[X]$ *tel que:*

$$P(X) = (X - a)\,Q(X)\,.$$

Preuve:
$\boxed{\Leftarrow}$ Clair...

$\boxed{\Rightarrow}$ a est racine de P donc $P(a) = \ldots\ldots$, et notant $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$:

$$P(X) = P(X) - P(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \sum_{k=0}^{n} a_k a^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (X^k - a^k)\,.$$

Par la formule de Bernoulli:

$$X^k - a^k = (X - a)\,\underbrace{\left(X^{k-1} + aX^{k-2} + a^2X^{k-3} + \ldots + Xa^{k-2} + a^{k-1}\right)}_{R_k(X)}\,.$$

Donc: $P(X) = (X - a)\underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k R_k(X)}_{Q(X)}.$

$\blacksquare$

Remarque 8 Si $\deg P = n$ alors $\deg Q = n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$). En effet:

Corollaire 4 *Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a_1, a_2, \dots, a_k$ k racines* **deux à deux distinctes** *de P, alors: il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que*

$$P(X) = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_k) Q(X).$$

Preuve:
$*$ a_1 est racine de P donc il existe $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que: $P(X) = (X - a_1) Q_1(X)$.
$*$ a_2 est racine de P donc $P(a_2) = (a_2 - a_1) Q_1(a_2) = 0$.
Or $a_2 \neq a_1$ donc a_2 est racine de Q_1, donc il existe $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tel que: $Q_1(X) = (X - a_2) Q_2(X)$. Il vient:

$$P(X) = (X - a_1)(X - a_2) Q_2(X).$$

$*$ a_3 est racine de P, à vous:

Ainsi de suite ...

■

Remarque 9 Le nombre de racines distinctes ne dépasse pas le degré! ($k \leqslant \deg P$). En effet:

POINT MÉTHODE 3 :
Le degré est donc un bon outil pour savoir si la factorisation est terminée... Pensez-y...

Corollaire 5 *Un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ (de degré inférieur ou égal à n) ayant (au moins) $n+1$ racines deux à deux distinctes est nul.*

Preuve: Par l'absurde, supposons P non nul:

■

POINT MÉTHODE 4 (méthode incomplète): montrer qu'un polynôme est nul.
LA QUESTION À SE POSER: CONNAÎT-ON SON DEGRÉ?
$\rightarrow$ si OUI: $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ($\deg P \leqslant n$).
On montre que P a $n+1$ racines distinctes (voir le cas des racines multiples)

$\rightarrow$ si NON: on montre que P a une infinité de racines.
(P s'annule sur un intervalle de $\mathbb{R}$ par exemple, ou pour tous les termes d'une suite, etc ...)

Remarque 10 Pour montrer que deux polynômes P et Q sont égaux, on montre que $P - Q$ est le polynôme nul.

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 (incomplète): factorisation d'un polynôme (de petit degré) via des racines évidentes.
Considérons $P(X) = 1 + X + X^2 + X^3$.

1. *Racines évidentes:* tester (en général) $1, -1, 2, -2$: sont-ils racines du polynôme?
   Ici, $P(-1) = 0$ donc -1 est racine de P.

2. *Commencer la factorisation:* $P(X) = (X+1)\ \underbrace{(aX^2 + bX + c)}_{Q(X)(\deg Q = 3-1=2)}$

   → **identification des coefficients pour déterminer $Q(X)$:**

   Donc $P(X) = (X+1)(X^2+1)$.

3. Et on recommence ...

On descend le degré par factorisations successives: on peut toujours (admis) se ramener à un polynôme de degré 2 ⇒ Δ (dans le cas des coefficients réels)

3.2 Racines mutliples

3.2.1 Définition

Définition 12 *Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.*
On dit que a est **racine d'ordre de multiplicité** *m ssi:*

$$\exists\, Q \in \mathbb{R}[X] / \left\{ \begin{array}{l} P(X) = (X-a)^m\, Q(X) \\ Q(a) \neq 0 \ \text{(a n'est pas racine de Q)} \end{array} \right.$$

Autrement dit: l'ordre de multiplicité d'une racine a est la `plus grande` *puissance de $(X-a)$ que l'on peut factoriser dans le polynôme.*
∗ *Une racine d'ordre de multiplicité 1 est dite* **simple**
∗ *Une racine d'ordre de multiplicité 2 est dite* **double**
∗ *Une racine d'ordre de multiplicité supérieur ou égal à 2 est dite* **multiple**.

Exemple 9 $P(X) = (X-1)^2\,(X+8)$

Remarque 11 Si un polynôme P s'écrit $P(X) = (X-a)^m Q(X)$, peut-on conclure que a est racine d'ordre m de P?

Par contre, on peut dire que a est racine d'ordre <u>au moins</u> m de P.

Corollaire 6 *Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Si $a_1, \ldots, a_k$ sont k racines* `deux à deux distinctes` *de P, d'ordres de multiplicité respectifs $m_1, \ldots, m_k$ alors:*

$$\exists\, Q \in \mathbb{R}[X] / P(X) = (X-a_1)^{m_1} \ldots (X-a_k)^{m_k}\, Q(X)\,.$$

Preuve: voir celle du Corollaire 4.

■

Remarque 12 Un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ ($n \geqslant 0$) possède au plus n racines dans $\mathbb{R}$ comptées avec leur ordre de multiplicité (par exemple, une racine double compte pour deux racines).

POINT MÉTHODE 5 (reprise du point méthode 2): Montrer qu'un polynôme est nul
LA QUESTION À SE POSER: CONNAÎT-ON SON DEGRÉ?
→ si OUI: $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ($\deg P \leqslant n$).
On montre que P a $n+1$ racines distinctes OU
On montre que P a (au moins) $n+1$ racines (comptées avec leur ordre de multiplicité)

→ si NON: on montre que P a une infinité de racines.
(P s'annule sur un intervalle de $\mathbb{R}$ par exemple, ou pour tous les termes d'une suite, etc ...)

CAPACITÉ EXIGIBLE 2 (reprise de la capacité 1): factorisation d'un polynôme via des racines évidentes
Quand on connaît une racine évidente , il faut chercher son ordre de multiplicité car on peut factoriser *davantage* le polynôme.

Exemple 10 Considérons $P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$.
$\ldots$ est racine évidente de P donc $P(X) = \ldots\ldots Q(X)$ où $\deg Q = \ldots$
Cette racine est-elle simple?
→ *dérivées successives*

3.2.2 Racine multiple et polynôme dérivé

Théorème 1 *Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors a est racine d'ordre de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ de P ssi:*

$$\begin{cases} P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(m-1)}(a) = 0 \\ P^{(m)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

Preuve:
$\boxed{\Leftarrow}$ ADMIS
$\boxed{\Rightarrow}$ Soit a racine d'ordre de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ de P.
$P(X) = (X-a)^m\, Q(X)$ avec $Q(a) \neq 0$.
Montrons que a est racine d'ordre de multiplicité $m-1$ de P':
$P'(X) = \ldots$

$= (X-a)^{m-1}\, Q_1(X)$, avec $Q_1(X) = \ldots$
Justifier que a est racine d'ordre $m-1$ de P':

Donc a est racine d'ordre ...... de P'' donc $P''(a) = \ldots$,
a est racine d'ordre ...... de $P^{(3)}$ donc $P^{(3)}(a) = \ldots$,
ainsi de suite...
Donc a est racine ...... de $P^{(m-1)}$ donc $P^{(m-1)}(a) = \ldots$, et $P^{(m-1)}(X) = (X-a)R(X)$ avec $R(a)\ldots$
Donc $P^{(m)}(X) =$ donc $P^{(m)}(a)\ldots$

■

Remarque 13 Si $P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(m-1)}(a) = 0$ alors a est racine d'ordre <u>au moins</u> m de P.

Exemple 11 (reprise de l'exemple 10): On cherche aussitôt l'ordre de multiplicité d'une racine évidente en dérivant successivement le polynôme.