

L'ensemble des polynômes réels $\mathbb{R}[X]$

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1 On appelle **monôme** une application P de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par:

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{K} / \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = ax^n.$$

* a est appelé le **coefficient** du monôme.

* Si $a \neq 0$, on dit que le monôme est de degré n et on note $\deg P = n$.

Remarque 1 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on convient de noter X^k tout monôme
$$\begin{array}{l} P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto P(x) = x^k \end{array}$$

Exemple 1 :

iX^8 est un monôme (à coefficient complexe) de degré

$2X^5$ est un monôme (à coefficient réel) de degré

On définit alors un polynôme comme une somme finie de monômes:

Définition 2 Une **fonction polynôme** (ou **polynôme**) à coefficients dans \mathbb{R} est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par:

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Les nombres a_0, a_1, \dots, a_n sont appelés les **coefficients** du polynôme.

On note $\boxed{\mathbb{R}[X]}$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} , donc $\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

Remarque 2 :

La fonction polynôme (ou polynôme) $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

est notée plus simplement (voir les espaces vectoriels) P ou $P(X)$, avec $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

Exemple 2 $P(X) = 1 + 2X \in \mathbb{R}[X]$.

Définition 3 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

(1) Si P a tous ses coefficients nuls, on appelle P le **polynôme nul** et on le note O .

(2) Si $P(X) = a_0$, on dit que P est un **polynôme constant**.

Exemple 3 $P(X) = 2$ est un polynôme constant.

Proposition 1 (admise): un polynôme est nul ssi tous ses coefficients sont nuls.

Autrement dit: si un polynôme s'annule en tout point de \mathbb{R} ($\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$) alors c'est le polynôme nul.

1.2 Degré d'un polynôme

Définition 4 Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on définit son **degré**, noté $\boxed{\deg P}$, par:

- si P est le polynôme nul, $\deg P = -\infty$,
- si $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ avec $a_n \neq 0$, alors $\deg P = n$.

On note $\boxed{\mathbb{R}_n[X]}$ l'ensemble des polynômes de degré **inférieur ou égal** à n .

Remarque 3 En d'autres termes, si P n'est pas le polynôme nul, $\deg P$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.

Définition 5 Soit P un polynôme non nul: $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$.

- (1) On appelle **terme dominant** son monôme de plus haut degré.
- (2) On appelle **coefficient dominant** le coefficient de son terme dominant.
- (3) a_0 est appelé **terme constant**.
- (4) On dit que P est **unitaire** si son coefficient dominant vaut 1.

Exemple 4 : $P(X) = 2 + X + X^3 \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 1 :

- (1) Qui sont les polynômes de degré 0? Qui est $\mathbb{R}_0[X]$?
- (2) Exprimer les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

2 Opérations sur $\mathbb{R}[X]$

2.1 Égalité

Proposition 2 Deux polynômes sont égaux ssi leurs coefficients sont égaux.

Preuve:

$\boxed{\Leftarrow}$ C'est clair...

$\boxed{\Rightarrow}$ Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X) = Q(X)$.

* Si P et Q sont nuls:

* Si P et Q sont non nuls: on note

$$P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k \text{ et } Q(X) = \sum_{k=0}^q b_k X^k, \text{ avec } a_p \neq 0 \text{ et } b_q \neq 0.$$

Qui sont p et q ?

Sans perte de généralité, supposons $p \leq q$. Calculer alors $P(X) - Q(X)$:

POINT MÉTHODE 1 : identification des coefficients.

Par exemple:

$$1 + X + X^2 + X^3 = c + (c+b)X + (b+a)X^2 + aX^3 \iff \begin{cases} c = \dots \\ c+b = \dots \\ b+a = \dots \\ a = \dots \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

ATTENTION! Ce sont les coefficients que l'on identifie, donc pas X dans le système!

$$1 + X + X^2 + X^3 = c + (c+b)X + (b+a)X^2 + aX^3 \iff \begin{cases} c = 1 \\ (c+b)X = X \\ (b+a)X^2 = X^2 \\ aX^3 = X^3 \end{cases} \text{ est FAUX!}$$

Corollaire 1 Si deux polynômes sont égaux alors ils ont même degré.

Preuve : Soient P et Q deux polynômes égaux.

* Si P et Q sont nuls, alors $\deg P = \dots = \deg Q$.

* Si P est non nul, on note $n = \deg P \geq 0$.

Ecrire l'expression de P : $P(X) =$

Utilisons la preuve de la Proposition 2:

■

2.2 Addition

Définition 6 Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, la somme de P et Q , notée $P + Q$ est l'application définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (P + Q)(x) = P(x) + Q(x).$$

Proposition 3 : $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $P + Q$ est un polynôme de degré:

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q).$$

Si $\deg P \neq \deg Q$ alors $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.

Exemple 5 :

(1) Considérons $P(X) = 1 + X^2$; $\deg P = \dots$ et $Q(X) = 1 + 2X$; $\deg Q = \dots$
 $(P + Q)(X) = P(X) + Q(X) =$, donc $\deg(P + Q) = 2 = \max(\deg P, \deg Q)$.

(2) Soit $R(X) = 1 - X - X^2$; $\deg R = \dots$
 $(P + R)(X) = P(X) + R(X) = 2 - X$, donc $\deg(P + R) = 1 < \max(\deg P, \deg R)$.
Mais si $R(X) = 1 - X + X^2$, alors $(P + R)(X) = P(X) + R(X) =$, donc $\deg(P + R) = 2 = \max(\deg P, \deg R)$.

Preuve : On note $a_n X^n$ le terme dominant de P , donc (que peut-on dire de n et a_n ?)

De même, on note $b_m X^m$ le terme dominant de Q , donc (que peut-on dire de m et b_m ?)

* Si $n \neq m$, on suppose $n < m$ (le cas $n > m$ est à traiter en exercice).

$$(P + Q)(X) = \dots$$

Alors le coefficient dominant de $P + Q$ est donc $\deg(P + Q) = \dots = \max(\deg P, \deg Q)$.

* Si $n = m$, a-t-on $a_n + b_m \neq 0$?

Conclure:

■

2.3 Multiplication

Définition 7 Pour tous polynômes P et $Q \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

(1) Le produit de λ et P , noté λP est l'application définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda P)(x) = \lambda \times P(x).$$

(2) Le produit de P et Q , noté PQ est l'application définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (PQ)(x) = P(x) \times Q(x).$$

Proposition 4 :

(1) $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$, PQ est un polynôme de degré:

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q.$$

(2) $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda P$ est un polynôme de degré:

$$\deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg P & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

Exemple 6 Considérons $P(X) = 1 + X^2$; $\deg P = 2$ et $Q(X) = 1 + 2X$; $\deg Q = 1$.

$$(PQ)(X) = P(X)Q(X) =$$

$$\text{donc } \deg(PQ) = \dots = \deg P + \deg Q.$$

Preuve :

(1) * Si $P = 0$ ou $Q = 0$ alors $PQ = 0$; donc $\deg(PQ) = \dots = \deg P + \deg Q$.

* Si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$ alors notons: $a_n X^n$ le terme dominant de P et $b_m X^m$ celui de Q .

Que peut-on dire de n, m, a_n et b_m ?

Montrons que PQ est bien un polynôme:

$$(PQ)(X) = \left(\sum_{k=0}^n a_k X^k \right) \left(\sum_{k=0}^m b_k X^k \right) =$$

Donner le coefficient dominant de PQ :

$$\text{Donc } \deg(PQ) = \dots = \deg P + \deg Q$$

(2) est une conséquence de (1). ■

POINT MÉTHODE 2 : Produit degré par degré

Sur un exemple : développer $(X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$.

Corollaire 2 Une combinaison linéaire de monômes de degrés différents deux à deux ne peut être nulle que si tous les coefficients sont nuls.

Preuve:

Corollaire 3 Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$(1) PQ = 0 \iff P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

$$(2) \text{ Si } R \text{ est un polynôme NON NUL, } PR = QR \Rightarrow P = Q.$$

Preuve : ■

2.4 Composition

Définition 8 Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

La composée de Q par P , notée $P \circ Q$ est l'application définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (P \circ Q)(x) = P(Q(x)).$$

Remarque 4 Si $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ alors $(P \circ Q)(X) = a_0 + a_1Q(X) + \dots + a_n(Q(X))^n$.

Exemple 7 Considérons $P(X) = 1 + X^2$; $\deg P = \dots$ et $Q(X) = 1 + 2X$; $\deg Q = \dots$

$$P \circ Q(X) = P(Q(X)) =$$

$$\text{et } \deg(P \circ Q) = \dots = \deg P \times \deg Q.$$

Proposition 5 Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, où Q n'est pas un polynôme constant.

Alors la composée $P \circ Q$ est un polynôme de degré:

$$\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q.$$

Preuve : Notons b_mX^m le coefficient dominant de Q et a_nX^n celui de P .

Alors $b_m(Q(X))^n$ est le terme dominant de $P \circ Q(X)$ car:

$$\text{Donc } \deg(P \circ Q) = \dots = \deg P \times \deg Q.$$

■

Remarque 5 Etude du cas où Q est constant:

(1) $P(X) = 1 - 2X + X^2$ et $Q(X) = 2$. $P \circ Q(X) = \dots$

La formule est-elle vraie?

(2) $P(X) = 1 - 2X + X^2$ et $Q(X) = 1$. Que se passe-t-il?

Dans ce cas, on dit que 1 est une racine de P (voir partie 3.)

2.5 Dérivation

Définition 9 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$: $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \dots + a_nX^n$.

On définit le **polynôme dérivé** de P , noté P' par:

$$\begin{cases} P'(X) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \dots + na_nX^{n-1} & \text{si } \deg P \geq 1 \\ P' = 0 & \text{si } P \text{ est constant} \end{cases}$$

Remarque 6 De façon équivalente, on peut écrire P' avec le signe \sum :

si $P(X) = \sum_{k=0}^n a_kX^k$ non constant, alors:

$$P'(X) = \sum_{k=1}^n ka_kX^{k-1} = \sum_{(k'=k-1)}^{n-1} (k+1)a_{k+1}X^k.$$

(on parle de dérivation terme à terme)

Remarque 7 Les formules classiques de dérivation se généralisent au cas des polynômes: $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$; $(PQ)' = P'Q + PQ'$; $(P \circ Q)' = P' \circ Q \times Q'$.

Proposition 6 Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, P' est un polynôme de degré:

$$\deg P' = \begin{cases} \deg P - 1 & \text{si } P \text{ est non constant} \\ -\infty & \text{si } P \text{ est constant} \end{cases}$$

Preuve : Si P est non constant, on note a_nX^n son terme dominant.

Définition 10 (dérivées successives):

On définit par récurrence $P^{(j)}$ la dérivée j -ième de P par:

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall j \in \mathbb{N}, P^{(j+1)} = (P^{(j)})' \end{cases}$$

$P^{(j+1)}$ est le polynôme dérivé de $P^{(j)}$.

Exemple 8 $P(X) = 4X^3 - X + 2$, alors:

$$P'(X) =$$

$$P''(X) =$$

$$P^{(3)}(X) =$$

Que se passe-t-il pour $P^{(k)}(X)$, pour tout $k \geq 4$?

Proposition 7 $\forall j \geq \deg P + 1, P^{(j)}(X) = 0$.

Preuve:

* Si P est nul ou constant:

* Si $\deg P \geq 1$:

$$\deg P' =$$

$$\deg P'' =$$

⋮

Si $m = \deg P, \deg P^{(m)} = \dots$

$P^{(m)}$ est donc constant et $P^{(m+1)}$ est le polynôme nul...

3 Factorisation d'un polynôme

3.1 Racine d'un polynôme

Définition 11 Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

On dit que a est **racine** de P si $P(a) = 0$.

Proposition 8 Soient P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

a est racine de P ssi il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que:

$$P(X) = (X - a)Q(X).$$

Preuve:

\Leftarrow Clair...

\Rightarrow a est racine de P donc $P(a) = \dots$, et notant $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$:

$$P(X) = P(X) - P(a) = \sum_{k=0}^n a_k X^k - \sum_{k=0}^n a_k a^k = \sum_{k=0}^n a_k (X^k - a^k).$$

Par la formule de Bernoulli:

$$X^k - a^k = (X - a) \underbrace{(X^{k-1} + aX^{k-2} + a^2X^{k-3} + \dots + Xa^{k-2} + a^{k-1})}_{R_k(X)}.$$

$$\text{Donc: } P(X) = (X - a) \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k R_k(X)}_{Q(X)}.$$

Remarque 8 Si $\deg P = n$ alors $\deg Q = n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$). En effet:

Corollaire 4 Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et a_1, a_2, \dots, a_k k racines deux à deux distinctes de P , alors: il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(X) = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_k) Q(X).$$

Preuve:

* a_1 est racine de P donc il existe $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que: $P(X) = (X - a_1) Q_1(X)$.

* a_2 est racine de P donc $P(a_2) = (a_2 - a_1) Q_1(a_2) = 0$.

Or $a_2 \neq a_1$ donc a_2 est racine de Q_1 , donc il existe $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tel que: $Q_1(X) = (X - a_2) Q_2(X)$. Il vient:

$$P(X) = (X - a_1)(X - a_2) Q_2(X).$$

* a_3 est racine de P , à vous:

Ainsi de suite ...

■

Remarque 9 Le nombre de racines distinctes ne dépasse pas le degré! ($k \leq \deg P$). En effet:

POINT MÉTHODE 3 :

Le degré est donc un bon outil pour savoir si la factorisation est terminée... Pensez-y...

Corollaire 5 Un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ (de degré inférieur ou égal à n) ayant (au moins) $n + 1$ racines deux à deux distinctes est nul.

Preuve: Par l'absurde, supposons P non nul:

■

3.2 Racines multiples

3.2.1 Définition

Définition 12 Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

On dit que a est **racine d'ordre de multiplicité m** ssi:

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X] / \begin{cases} P(X) = (X - a)^m Q(X) \\ Q(a) \neq 0 \text{ (} a \text{ n'est pas racine de } Q \text{)} \end{cases}$$

Autrement dit: l'ordre de multiplicité d'une racine a est la **plus grande** puissance de $(X - a)$ que l'on peut factoriser dans le polynôme.

* Une racine d'ordre de multiplicité 1 est dite **simple**

* Une racine d'ordre de multiplicité 2 est dite **double**

* Une racine d'ordre de multiplicité supérieur ou égal à 2 est dite **multiple**.

Exemple 9 $P(X) = (X - 1)^2 (X + 8)$

Remarque 10 Si un polynôme P s'écrit $P(X) = (X - a)^m Q(X)$, peut-on conclure que a est racine d'ordre m de P ?

Par contre, on peut dire que a est racine d'ordre au moins m de P .

Corollaire 6 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Si a_1, \dots, a_k sont k racines deux à deux distinctes de P , d'ordres de multiplicité respectifs m_1, \dots, m_k alors:

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X]/P(X) = (X - a_1)^{m_1} \dots (X - a_k)^{m_k} Q(X).$$

Preuve: voir celle du Corollaire 4. ■

Remarque 11 Un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ ($n \geq 0$) possède au plus n racines dans \mathbb{R} comptées avec leur ordre de multiplicité (par exemple, une racine double compte pour deux racines).

POINT MÉTHODE 4 Montrer qu'un polynôme est nul

LA QUESTION À SE POSER: CONNAÎT-ON SON DEGRÉ?

→ si OUI: $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ($\deg P \leq n$).

On montre que P a $n + 1$ racines distinctes OU

On montre que P a (au moins) $n + 1$ racines (comptées avec leur ordre de multiplicité)

→ si NON: on montre que P a une infinité de racines.

(P s'annule sur un intervalle de \mathbb{R} par exemple, ou pour tous les termes d'une suite, etc ...)

3.2.2 Racine multiple et polynôme dérivé

Théorème 1 Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors a est racine d'ordre de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ de P ssi:

$$\begin{cases} P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \\ P^{(m)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

Preuve:

\squareleftarrow ADMIS

\squarerightarrow Soit a racine d'ordre de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ de P .

$P(X) = (X - a)^m Q(X)$ avec $Q(a) \neq 0$.

Montrons que a est racine d'ordre de multiplicité $m - 1$ de P' :

$P'(X) = \dots$

$= (X - a)^{m-1} Q_1(X)$, avec $Q_1(X) = \dots$

Justifier que a est racine d'ordre $m - 1$ de P' :

Donc a est racine d'ordre \dots de P'' donc $P''(a) = \dots$,

a est racine d'ordre \dots de $P^{(3)}$ donc $P^{(3)}(a) = \dots$,

ainsi de suite...

Donc a est racine \dots de $P^{(m-1)}$ donc $P^{(m-1)}(a) = \dots$, et $P^{(m-1)}(X) = (X - a)R(X)$ avec $R(a) \dots$

Donc $P^{(m)}(X) = \dots$ donc $P^{(m)}(a) \dots$ ■

Remarque 12 Si $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$ alors a est racine d'ordre au moins m de P .

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 factorisation d'un polynôme via des racines évidentes

Quand on connaît une racine évidente, il faut chercher son ordre de multiplicité car on peut factoriser *davantage* le polynôme.

Donc on cherche aussitôt l'ordre de multiplicité d'une racine évidente en dérivant successivement le polynôme.

Exemple 10 Considérons $P(X) = 1 + X + X^2 + X^3$.

1. *Racines évidentes:* tester (en général) $1, -1, 2, -2$: sont-ils racines du polynôme?

Ici, $P(-1) = 0$ donc -1 est racine de P . Cette racine est-elle simple?

→ *dérivées successives*

2. Commencer la factorisation: $P(X) = (X + 1) \underbrace{(aX^2 + bX + c)}_{Q(X) (\text{deg } Q = 3 - 1 = 2)}$
→ **identification des coefficients pour déterminer $Q(X)$:**

Donc $P(X) = (X + 1)(X^2 + 1)$.

3. Et on recommence ... (éventuellement)

On descend le degré par factorisations successives: on peut toujours (admis) se ramener à un polynôme de degré 2 $\Rightarrow \Delta$ (dans le cas des coefficients réels)

Exemple 11 Considérons $P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$.

... est racine évidente de P donc $P(X) = \dots Q(X)$ où $\text{deg } Q = \dots$

Cette racine est-elle simple?

→ *dérivées successives*