Développements limités

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Fonctions négligeables devant $(x \mapsto x^n)$, $n \in \mathbb{Z}$

1.1 Définition

Définition 1 *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \{0, -\infty, +\infty\}$.*
On dit que f **est négligeable devant** $(x \mapsto x^n)$ **au voisinage de** *a s'il existe une fonction ε telle que*

$$f(x) = x^n\, \varepsilon(x) \text{ au voisinage de } a \text{ et } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

On note: $\boxed{f(x) \underset{a}{=} \circ(x^n)}$ *qui se lit "$f(x)$ est un petit o de x^n au voisinage de a".*

Exemple 1 :
(1) $\forall n, m \in \mathbb{N}$ tq $n < m$, $x^n \underset{+\infty}{=} \circ(x^m)$, avec $\varepsilon(x) = \dots$
(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x^n \underset{0}{=} \circ(\sqrt{x})$, avec $\varepsilon(x) = \dots$
(3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln x \underset{0}{=} \circ(\frac{1}{x^n})$, avec $\varepsilon(x) = \dots$

Remarque 1 : ATTENTION!!!!
La notation $f \underset{a}{=} \circ(g)$ n'est pas une "vraie" égalité, au sens où $f_1 \underset{a}{=} \circ(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} \circ(g)$ n'implique pas forcément que $f_1 = f_2$!!!
contre-exemple: $x^2 \underset{0}{=} \circ(x)$ et $x^3 \underset{0}{=} \circ(x)$ ...

En fait, l'écriture $f \underset{a}{=} \circ(g)$ signifie que f appartient à une certaine classe de fonctions: les fonctions négligeables devant g.

Remarque 2 Puisque la fonction puissance $(x \mapsto x^n)$, $n \in \mathbb{Z}$, ne s'annule qu'en 0 au voisinage de 0 (pour $n > 0$), on se ramène à une caractérisation plus simple (c'est elle qui est utilisée dans les exercices):

Proposition 1 *Soit $n \in \mathbb{Z}$ et f une fonction définie au voisinage de a, $a \in \{0, -\infty, +\infty\}$. Alors:*

$$\boxed{f(x) \underset{a}{=} \circ(x^n) \iff \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x^n} = 0}$$

Preuve:

■

Remarque 3 : cas particulier où $n = 0$.

$$\boxed{f(x) \underset{a}{=} \circ(1) \iff \lim_{x \to a} f(x) = \dots}$$

Proposition 2 **(lien avec l'équivalence)**

$$f(x) \underset{a}{\sim} x^n \iff f(x) - x^n \underset{a}{=} \circ(x^n)\,.$$

Preuve:

$\blacksquare$

Exemple 2 $\sin x \underset{0}{\sim} x \iff \dots$

Remarque 4 : réécriture importante.

$$f(x) - g(x) \underset{a}{=} \circ(x^n) \iff f(x) \underset{a}{=} g(x) + \circ(x^n)\,.$$

Donc la Proposition 2 se réécrit:

$$\boxed{f(x) \underset{a}{\sim} x^n \iff f(x) \underset{a}{=} x^n + \circ(x^n)}$$

Exemple 3 :
(1) $\sin x \underset{0}{=} x + \circ(x)$.
(2) $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \iff \dots$
(3) $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \iff \dots$

1.2 Opérations

Proposition 3 *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}^*$,
$f(x) \underset{a}{=} \circ(x^n) \iff \lambda\, f(x) \underset{a}{=} \circ(x^n) \iff f(x) \underset{a}{=} \circ(\lambda\, x^n)$.

Preuve:

$\blacksquare$

Exemple 4 $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2} \iff \cos x - 1 \underset{0}{=} \dots$

Proposition 4 :
(1) Si $f(x) \underset{a}{=} \circ(x^n)$ *et* $g(x) \underset{a}{=} \circ(x^n)$ *alors* $f(x) + g(x) \underset{a}{=} \circ(x^n)$.
(2) Si $f(x) \underset{a}{=} \circ(x^n)$ *et* $g(x) \underset{a}{=} \circ(x^m)$ *alors* $f(x)\, g(x) \underset{a}{=} \circ(x^{n+m})$.
(3) Si $f(x) \underset{a}{=} \circ(x^n)$ *alors* $f^m(x) \underset{a}{=} \circ(x^{n\,m})$.

Preuve:

$\blacksquare$

2 Développements limités en 0

2.1 Définition

2.1.1 Cas général

Définition 2 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie au voisinage de 0.*
On dit que f **admet un développement limité (DL) à l'ordre** n **en** 0 *(noté $DL_n(0)$) s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que:*

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \circ(x^n) \\ &\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \circ(x^n) \\ &\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \ , \ \textit{où} \ \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \end{aligned}$$

Exemple 5 : Ecrire le $DL_1(0)$ des fonctions sin et exp; et le $DL_2(0)$ de cos:

Remarque 5 En d'autres termes, un DL est une approximation LOCALE d'une fonction par un polynôme , en sachant que l'erreur commise est négligeable devant x^n.

Exemple 6 : $DL_n(0)$ **de** $(x \mapsto \dfrac{1}{1-x})$**.**
Rappeler la somme des termes d'une suite géométrique: $\forall x \in \underbrace{]-1,1[}_{\text{un voisinage de 0 suffit}}$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \ldots$$

Donc $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + x^n\, \varepsilon(x)$, avec $\varepsilon(x) = \ldots$
On a $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = \ldots$, donc $(x \mapsto \dfrac{1}{1-x})$ admet un $DL_n(0)$:

Remarque 6 Plus généralement:
(1)

Définition 3 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.*
On dit que f admet un DL à l'ordre n au voisinage de a, noté $DL_n(a)$ s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que:

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{a}{=} a_0 + a_1\,(x-a) + a_2\,(x-a)^2 + \ldots + a_n\,(x-a)^n + \circ((x-a)^n) \\ &\underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x-a)^k + \circ((x-a)^n)\,. \end{aligned}$$

Dans la pratique, on se ramène à un DL en 0 en posant $\boxed{x = a + h}$:

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x-a)^k + \circ((x-a)^n) \iff f(a+h) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \circ(h^n)\,.$$

(2)

Définition 4 *Soit f une fonction définie sur $[A,+\infty[$.*
On dit que f admet un DL à l'ordre n en $+\infty$ s'il existe des réels $a_0,\dots,a_n$ tels que:

$$f(x) \underset{+\infty}{=} a_0 + a_1\,\frac{1}{x} + a_2\,\frac{1}{x^2} + \ldots + a_n\,\frac{1}{x^n} + \circ(\frac{1}{x^n})\,.$$

De même, si f est définie sur $]-\infty, A]$, on dit que f admet un DL à l'ordre n en $-\infty$ s'il existe des réels $a_0,\dots,a_n$ tels que:

$$f(x) \underset{-\infty}{=} a_0 + a_1\,\frac{1}{x} + a_2\,\frac{1}{x^2} + \ldots + a_n\,\frac{1}{x^n} + \circ(\frac{1}{x^n})\,.$$

Dans la pratique, on se ramène à un DL en 0 en posant $\boxed{x = \frac{1}{t}}$:

$$f(x) \underset{+\infty}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k\,\frac{1}{x^k} + \circ(\frac{1}{x^n}) \iff f(\frac{1}{t}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k\,t^k + \circ(t^n)\,.$$

2.1.2 Cas particuliers des DL à l'ordre 0 et 1

Remarque 7 :
Rappel: Les gros ont une petite puissance en 0, ou plus mathématiquement: si $n < m$, $x^m \underset{0}{=} \circ(x^n)$.
Ceci nous permet de **tronquer** un DL:

Si f admet un DL à l'ordre n en 0, alors pour tout $p \leqslant n$, f admet un DL à l'ordre p en 0.

Exemple 7 :
(1) Si $f(x) \underset{0}{=} -3 + x + \underbrace{\frac{1}{2}x^3 + \circ(x^3)}_{=\circ(x)}$ alors $f(x) \underset{0}{=} -3 + x + \circ(x)$.
(2) Si $f(x) \underset{0}{=} -2x^2 + x^4 + \circ(x^4)$ alors $f(x) \underset{0}{=} \ldots$
(3) Donner le $DL_1(0)$ de cos:

Proposition 5 **(lien entre un DL à l'ordre 0 et la continuité):**
f admet un DL en a à l'ordre 0 ssi la limite de f en a existe et est finie.

Preuve:

■

Remarque 8 Deux cas se présentent:
(1) Si f est définie en a alors f est en a et $f(a) = \ldots$
(2) Si f n'est pas définie en a alors f en a et on pose $f(a) = \ldots$

Proposition 6 **(lien entre un DL à l'ordre 1 et la dérivabilité):**
f admet un DL en a à l'ordre 1 de la forme $f(a+h) \underset{0}{=} a_0 + a_1 h + \circ(h)$ ssi f (ou son prolongement par continuité) est dérivable en a. Dans ce cas, $f'(a) = a_1$.

Preuve: pour $a = 0$

■

Remarque 9 Si f admet un DL à l'ordre 1 en a, on lit directement sur le DL une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a: $y = a_0 + a_1(x - a)$.

Remarque 10 : ATTENTION!!!
Ce n'est plus vrai pour un DL à un ordre supérieur ou égal à 2!! Si f admet un DL en a à l'ordre 2, $f''(a)$ n'existe pas forcément!
contre-exemple: Considérons la fonction f donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Montrer que $\lim_{x \to 0} x \sin(\dfrac{1}{x}) = 0$, et en déduire que f admet un $DL_2(0)$ que l'on donnera.

- SANS CALCULS, justifier que f est continue et dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

- Pour tout $x \neq 0$, calculer le taux d'accroissement de f' en 0. f est-elle deux-fois dérivable en 0?

2.2 Existence et unicité

2.2.1 Unicité

***Proposition 7* (ADMISE):** *Si f admet un $DL_n(0)$, ce dernier est unique. En d'autres termes: s'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ et $b_0, \ldots b_n$ tels que*

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + \circ(x^n) \text{ et } f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k\, x^k + \circ(x^n)$$

alors $\forall k \in [|0, n|]$, $a_k = b_k$.

Exemple 8 Soit f une fonction qui admet un $DL_n(0)$.
Si f est paire (resp. impaire), que peut-on dire de son DL?

On a $f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \circ(x^n)$.

Si f est impaire, que peut-on dire?

2.2.2 Existence (ou formule de Taylor-Young)

Théorème 1 **(formule de Taylor-Young)**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I. Alors, pour tout $a \in I$, f admet un $DL_n(a)$ donné par:

$$\begin{aligned} f(a+h) &\underset{0}{=} f(a) + f'(a)\,h + \frac{f''(a)}{2!}\,h^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}\,h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,h^n + \circ(h^n) \\ &\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,h^k + \circ(h^n)\,. \end{aligned}$$

Remarque 11 Rappeler la définition de $f \in \mathcal{C}^n(I)$:

Exemple 9 : $\boxed{\textbf{DL usuels en } 0}$

1. *Fonction exponentielle:*

2. *Fonctions circulaires:*

3. *Fonction* $(x \mapsto (1+x)^\alpha)$, $\alpha \neq 0$*:*

4. *Fonction* $x \mapsto \ln(1+x)$*:*

2.3 Opérations sur les DL

La formule de Taylor-Young affirme l'existence d'un DL, mais le calcul des dérivées successives est souvent difficile. Dans la pratique, on obtient plutôt un DL comme somme, produit, composée ou quotient de DL usuels.

2.3.1 Somme

Proposition 8 *Soient f et g deux fonctions qui admettent un $DL_n(0)$:*

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + \circ(x^n) \text{ et } g(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k\, x^k + \circ(x^n)\,.$$

Alors $f+g$ a un $DL_n(0)$ donné par:

$$f(x) + g(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)\, x^k + \circ(x^n)\,.$$

Preuve:

■

Remarque 12 ATTENTION!!! **Ne pas additionner des DL d'ordre différent: il faut tronquer les DL d'ordre max...**
Conclusion: dans les calculs pratiques: tronquer au fur et à mesure et bien réfléchir sur les ordres.

Exemple 10 :

(1) $DL_4(0)$ de $(x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2})$.

(2) $DL_2(0)$ de $(x \mapsto \sqrt{1+x} + \sin x)$.

2.3.2 Produit

Proposition 9 **(ADMISE)** *Si f a un $DL_n(0)$ et g un $DL_m(0)$ alors le produit $f\,g$ a un DL en 0 à l'ordre* $\min(n,m)$ *(au moins) obtenu en multipliant les DL de f et de g et en ne gardant que les termes inférieurs ou égaux à* $\min(n,m)$*.*

Remarque 13 Dans les calculs pratiques, on distingue deux méthodes:
$*$ On prend chaque DL à l'ordre max puis on tronque *au fur et à mesure.*
$*$ On prend les plus petits ordres possibles dès le départ: le premier terme d'un DL donne l'ordre de l'autre DL.
Explications sur des exemples:

Exemple 11 :
(1) $DL_3(0)$ de $(x \mapsto (e^x - 1)\sin x)$.
PREMIÈRE MÉTHODE:
$DL_3(0)$ de $e^x - 1$:

$DL_3(0)$ de sin:
Donc par produit: **(on tronque au fur et mesure, selon que "les gros ont une petite puissance en 0"):**

DEUXIÈME MÉTHODE: détermination des plus petits ordres dès le départ:

(2) $DL_4(0)$ de $(x \mapsto (1-\cos x)\ln(1+x))$, selon la méthode de votre choix:

2.3.3 Composition

On ne donnera pas de théorème général, mais on s'exercera sur des exemples simples.

Remarque 14 ATTENTION!!! **Bien vérifier que la nouvelle variable tend vers** 0**!!**

Exemple 12 $DL_5(0)$ de $(x \mapsto \ln(\cos x))$:

1. $\cos x \underset{0}{=} \dots$

2. On pose $u = \dots$ avec u qui vérifie: $\dots$

3. $\ln(1+u) \underset{0}{=} \dots$

   donc $\ln(\cos x) \underset{0}{=} \dots$

Exemple 13 $DL_2(0)$ de $(x \mapsto e^{\sqrt{1+x}})$:

Exemple 14 Application: calcul du DL d'un inverse.
Si f a un $DL_n(0)$ et $f(0) = a \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ a un $DL_n(0)$ qui s'obtient par:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1+u(x)}, \text{ avec } u(0) = 0$$

puis en utilisant la composition des $DL_n(0)$ de u et de $(x \mapsto \frac{1}{1+x})$.

$DL_3(0)$ de $(x \mapsto \frac{1}{e^x + \cos x})$.

$\cos x \underset{0}{=} \ldots$ et $e^x \underset{0}{=} \ldots$

donc $e^x + \cos x \underset{0}{=} \ldots$
Donc:

$$\frac{1}{e^x + \cos x} \underset{0}{=} \frac{1}{\qquad\qquad\qquad} \underset{0}{=} \ldots \times \frac{1}{\qquad\qquad}$$

On compose les DL: on pose $u =$ qui vérifie:

Or $\frac{1}{1+u} \underset{0}{=} \ldots$
donc $\frac{1}{e^x + \cos x} \underset{0}{=} \ldots$

Exemple 15 Application: calcul du DL d'un quotient.
Si f et g admettent un $DL_n(0)$ et si $g(0) = a \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ a un $DL_n(0)$ qui s'obtient par:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$$

puis en utilisant les $DL_n(0)$ de f et du quotient $\frac{1}{g}$.

$DL_5(0)$ de tan:

2.4 Primitivation d'un DL

***Proposition 10* (ADMISE):** *Soit f une fonction dérivable telle que f' a un $DL_n(0)$:*

$$f'(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n + \circ(x^n)$$

Alors f a un $Dl_{n+1}(0)$ obtenu en intégrant ce DL:

$$f(x) \underset{0}{=} \boxed{f(0)} + a_0\, x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2\, \frac{x^3}{3} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})\,.$$

Remarque 15 On ne dérive JAMAIS un DL!!
contre-exemple: Soit $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$. Alors $f(x) \underset{0}{=} \circ(x)$, donc f a un $DL_1(0)$ mais f' n'a pas de DL à l'ordre 0 en 0, puisque f' n'est pas continue en 0...

Exemple 16 : DL usuels.
(1) $DL_n(0)$ de $(x \mapsto \ln(1+x))$:

(2) $DL_n(0)$ de arctan:

3 Applications

3.1 Recherche d'équivalents et calcul de limites

Souvenez-vous... : l'équivalence n'est pas compatible avec la somme.
Donc pour chercher un équivalent ou une limite d'une somme, on passe par les DL. Une fois le DL obtenu, on obtient un équivalent de la façon suivante:
Si $f(x) \underset{0}{=} P(x) + \circ(x^n)$, on sait que P est équivalent à son terme de plus bas degré, d'où:

Méthode: on pousse le DL jusqu'à obtenir un PREMIER terme NON NUL, puis on TRONQUE:

$\boxed{\text{Soit } p \text{ le plus petit indice tel que } a_p \neq 0}$

Alors: $f(x) \underset{0}{=} a_p\, x^p + \underbrace{a_{p+1}\, x^{p+1} + \ldots + a_n\, x^n + \circ(x^n)}_{=\circ(x^p)}$, donc $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} a_p\, x^p}$

Remarque 16 Les calculs sont difficiles à mettre en place car on ne sait pas à l'avance jusqu'à quel ordre il faut aller...

Exemple 17 : Calculer la limite en 0 des fonctions suivantes
(1) $f(x) = \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$.

Exemple 18 Par la formule de Taylor-Young:
- $*$ Si f est $\mathcal{C}^2$ alors $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \underset{0}{\sim} f'(x)$.
- $*$ Si f est $\mathcal{C}^3$ alors $\dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \underset{0}{\sim} f'(x)$.

En effet:

3.2 Allure graphique LOCALE

3.2.1 Etude des tangentes au voisinage d'un point

Rappel: f est dérivable en a ssi f a un $DL_1(a)$ et on lit l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a sur le DL:

$$f(x) \underset{a}{=} \underbrace{a_0 + a_1\,(x-a)}_{\text{équation de la tangente à } \mathcal{C}_f \text{ en } a} + \circ\,(x-a)\,.$$

Le DL à un ordre supérieur permet de préciser la position entre la courbe et sa tangente <u>au voisinage</u> de a. Plus précisément:

Si $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p\,(x-a)^p + \circ\,((x-a)^p)$, avec $p \geqslant 2$ et $\boxed{a_p \neq 0}$, alors la position est entre la courbe et sa tangente en a est donnée par le signe de $a_p\,(x-a)^p$.

Preuve:

■

Plus précisément:

- $\boxed{p \text{ pair}}$

- $\boxed{p \text{ impair}}$
  ATTENTION!! $(x-a)^p$ change de signe au voisinage de a.
  $(x-a)^p > 0$ si ...... et $(x-a)^p < 0$ si ...... Donc:

Exemple 19 Etudier la fonction f au voisinage de 0 définie par:

$$f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1\,.$$

Exemple 20 Etudier au voisinage de 0 la fonction: $g(x) = \dfrac{1}{1+e^{4x}}$.

3.2.2 Etude des asymptotes au voisinage d'un point

Soit f admettant une branche infinie, i.e $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = a_0x + a_1$ ($a_0 \neq 0$) s'il existe une fonction ε telle que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varepsilon(x) = 0$, vérifiant:

$$f(x) = a_0x + a_1 + \varepsilon(x)\,.$$

On se ramène en 0 en posant $t = \dfrac{1}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote ssi:

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{t}) &\underset{0}{=} a_0\frac{1}{t} + a_1 + \varepsilon(\frac{1}{t}) \\ \text{ssi } tf(\frac{1}{t}) &\underset{0}{=} a_0 + a_1\, t + t\varepsilon(\frac{1}{t}) \\ \text{ssi } \frac{f(x)}{x} &\underset{\infty}{=} a_0 + a_1\frac{1}{x} + \circ(\frac{1}{x})\,. \end{aligned}$$

Plus précisément:
si $tf(\dfrac{1}{t}) \underset{0}{=} a_0 + a_1\, t + a_pt^p + \circ(t^p)$ avec $p \geqslant 2$ et $a_p \neq 0$, alors $f(x) \underset{\infty}{=} a_0x + a_1 + \dfrac{a_p}{x^{p-1}} + \circ(\dfrac{1}{x^{p-1}})$,
et la position entre $\mathcal{C}_f$ et son asymptote est donnée par le signe de $\dfrac{a_p}{x^{p-1}}$ au voisinage de l'infini.

Exemple 21 :

(1) Etudier le comportement asymptotique en $+\infty$ de $f(x) = x^2 \ln(1 + \dfrac{1}{x})$.

(2) Etudier le comportement en l'infini de la fonction $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4}{x^2+1}}$.