L'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$

I. Calcul polynômial.

Exercice 1 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $P(-X) = P(X)$. Démontrer que tous les monômes de P sont de degré pair.

Exercice 2 Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Exercice 3 Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation: $P(X^2) = (1+X^2)\,P(X)$.
On pourra commencer par déterminer le degré d'un polynôme P solution.

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$: $(X^2+X+1)P'' - 12P = 0$.

II. Racines (simples et multiples).

Exercice 5 :

1. Soit P un polynôme. Montrer que l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme

$$Q(X) = P(X) - P(1) - (X-1)P'(X) + \frac{1}{4}(X-1)^2(P''(X) + P''(1))$$

est supérieur ou égal à 3.

2. On suppose $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme:

$$R_n(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n\,.$$

Exercice 6 Soit $P = X^{2n} - n^2X^{n+1} + 2(n^2-1)X^n - n^2X^{n-1} + 1$, $n \geqslant 3$.
Montrer que 1 est racine de P. Quel est son ordre de multiplicité?

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer α et β pour que le polynôme $P = \alpha X^{n+1} + \beta X^n + 1$ admette 1 comme racine double.

III. Suites polynômiales.

Exercice 8 Considérons la suite de polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$H_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 0\,,\ H_{n+1}(X) = H_n'(X) - 2X\,H_n(X)\,.$$

Préciser le degré et le coefficient dominant de H_n pour tout entier n.

Exercice 9 Polynômes de Tchebychev:
On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ par: $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ P_{n+2} = 2X\,P_{n+1} - P_n\,.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.

Exercice 10 On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$P_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\,,\ P_{n+1}(X) = (1+X^2)\,P_n'(X) - 2X(n+1)\,P_n(X)\,.$$

Déterminer le degré de P_n, pour tout entier n.

IV. Vers l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 11 Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels? Si oui, en donner base et dimension.
$F_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$ $\quad$ $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$
$F_3 = \{P \in \mathbb{R}[X]/\exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, P = aX^4 + (2b-a)X^3 + (a+b)X + 5b\}$

Exercice 12 On considère les polynômes :

$$P_1(X) = X^2 - X - 1 \quad P_2(X) = 2X^2 + 1 \quad Q_1(X) = 4X^2 - 2X - 1 \quad Q_2(X) = 5X^2 - X + 1\,.$$

Montrer que $Vect < P_1, P_2 >= Vect < Q_1, Q_2 >$.

Exercice 13 Soient les polynômes $P_1 = 1$, $P_2(X) = (1+X)^2$, $P_3(X) = (1-X)^2$ et $P_4(X) = X^3$.
Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 14 :

1. Soit D: $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

   (a) Montrer que D est une application linéaire. Déterminer sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Déterminer le noyau et l'image de cette application: est-elle bijective?

   (c) Montrer que $\dim(\ker D) + \dim(Im\,D) = \dim \mathbb{R}_3[X]$.

2. Soit f l'application:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & X\,P'(X) - P(X) \end{array}.$$

   (a) Montrer que f est linéaire. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Déterminer $\ker f$: l'application f est-elle injective?

   (c) Déterminer $Im\,f$: l'application f est-elle surjective?

3. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3. On définit E l'application de E dans lui-même par:

$$u(P) = P + (1-X)\,P'$$

   (a) Montrer que u est un endomorphisme de E.

   (b) Déterminer une base de $Im(u)$.

   (c) Déterminer une base de $\ker u$.